

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE CASAL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES

1^{re} THÈSE

SUR LES QUALITÉS ÉVOLUTIVES DES NAVIRES

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SUR LA DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FONCTIONS PROPRES

Soutenues, le 5 mai 1951, devant la Commission d'examen

<i>Jury</i> {	MM. H. VILLAT	<i>Président.</i>
	PÉRÈS	{ <i>Examineurs.</i>
	THIRY	

THÈSES
FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : CASAL.

Prénom : Pierre.

Date de la soutenance : 5 mai 1951.

Numéro d'ordre : Série A 2393, N° 3265.

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951. Série A 2393, N° 3265)

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951. Série A 2393, N° 3265)

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951. Série A 2393, N° 3265)

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951. Série A 2393, N° 3265)

MM. H. VILLAT

Président.

Jury

PÈRES

THOUY

Examineurs.

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : CASAL.

Prénom : Pierre.

Date de la soutenance : 2 mai 1951.

Numéro d'ordre : Série A 2393, N. 3265.

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951, Série A 2393, N. 3265)

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951, Série A 2393, N. 3265)

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951, Série A 2393, N. 3265)

CASAL (Pierre). — Sur les
qualités évolutives des navires. —
Paris, Imprimerie du Ministère de
l'Air, 1962. In-8°, 58 p., 31 fig.,
5 pl.

(Th. Sc. Math., Paris, 1951, Série A 2393, N. 3265)

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE CASAL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES

1^{re} THÈSE

SUR LES QUALITÉS ÉVOLUTIVES DES NAVIRES

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SUR LA DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FONCTIONS PROPRES

Soutenues, le 5 mai 1951, devant la Commission d'examen

Jury	{	MM. H. VILLAT	{	Président.
		PÉRÈS		Examineurs.
		THIRY		



SUR LES QUALITÉS ÉVOLUTIVES
DES NAVIRES

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions.	LAFFITIE	T	Chimie (P.C.B.).
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	FAVARD		Calcul des probabilités et physique-mathématique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de physique.	COULOMB	T	Physique du globe.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	CHRÉTIEN	T	Chimie (P.C.B.).
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	P. DRACH		Zoologie.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	KASTLER		Physique.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
De BROGLIE	T	Théories physiques.	EPHRUSSI	T	Génétique.
JOB	T	Chimie générale.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	BAUER	T	Chimie - Physique.
COMBES	T	Physiologie végétale.	RIVIERE		Géologie (P.C.B.).
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	GAUTHIERET		Biologie végétale (P.C.B.).
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	LUCAS		Physique.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	A. THOMAS		Évolution des êtres organisés.
LAUGIER	T	Physiologie générale	ARNULF		Optique appliquée.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	MAX MORAND		Physique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	SOLEILLET		Physique.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
CHAZY	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	DANJON	T	Astronomie.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
DUPONT	T	Théories chimiques.	LAPORTE	T	Physique générale et radio-activité.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	JANET		Mathématiques générales.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	PETIT	T	Biologie maritime.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	GALLIEN		Biologie animale (P.C.B.).
Jacques BURCART	T	Géographie physique et géologie dynamique.	EICHHORN		Biologie végétale (P.C.B.).
AUBEL	T	Chimie biologique.	DE CUGNAC		Biologie végétale (P.C.B.).
M ^{me} JOLIOT-CURIE	T	Physique générale et radio-activité.	LAVAL		Physique (P.C.B.).
PLANTÉFOL	T	Botanique.	M ^{lle} CAUCHOIS		Chimie - Physique.
CABANNES	T	Recherches physiques.	THELLIER		Physique du globe.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	AUDUBERT		Électrochimie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	L'HÉRITIER		Génétique.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	GRIVET	T	Radio électricité.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	PONCIN		Mécanique des fluides.
WYART	T	Minéralogie.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
TEISSIER	T	Zoologie.	DUBREIL		Mathématiques générales.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	QUELET		Chimie (P.C.B.).
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	CAGNIARD		Géophysique appliquée.
MONNIER		Physiologie générale.	CHAMPETIER		Chimie appliquée.
PIVETEAU	T	Géologie.	CUVILLIER		Géologie structurale et géologie appliquée.
ROCARD	T	Physique.	JUNG		Pétrographie.
H. CARTAN	T	Mathématiques générales.	TRILLAT		Physique (P.C.B.).
			WIEMANN		Chimie (P.C.B.).
			LICHNEROWIEZ		Mathématiques.
			JACQUINOT		Physique (P.C.B.).
			VASSY		Physique de l'atmosphère.
			DESTOUCHES		Théories physiques.
			PRUVOST	T	Géologie.

Secrétaire Ch. MONIER



Digitized by the Internet Archive
in 2026

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION.....	1
Bases de la théorie	1
Le navire considéré comme surface portante	1
Rappel des idées directrices de la théorie classique	2
Schéma tourbillonnaire adapté au navire	4
 CHAPITRE PREMIER. Traction en dérive	 8
1,2 Schéma tourbillonnaire de la traction en dérive	8
1,3 Vitesse induite par les tourbillons	9
1,31 Vitesse induite par les tourbillons libres	9
1,32 Vitesse induite par les tourbillons liés	10
1,4 Calcul des forces exercées sur le navire	12
1,5 Solution pour une grande dérive.....	13
1,6 Solution pour une dérive quelconque	15
1,62 Valeur de C_y pour une dérive très faible	15
1,63 Calcul de la répartition des tourbillons	16
1,64 Critique de ces résultats	19
 CHAPITRE II. Giration forcée	 21
2,12 Schéma tourbillonnaire de la giration	22
2,2 Cas des grands rayons de giration	22
2,22 Force hydrodynamique et point d'application	23
2,3 Cas d'un rayon de giration quelconque	25
2,4 Influence de la forme du navire	28
2,42 Influence de la forme AV.....	30
2,43 Influence de la forme AR	31
2,5 Formules finales pour Y et N	33
2,6 Résultats expérimentaux	33
 CHAPITRE III. — Mouvements naturels des navires	 36
3,1 Diverses forces exercées sur le navire	36
3,2 Forces d'inertie	37

	PAGES
3,3 Forces dues au retard dans l'établissement de la circulation	39
3,4 Équations du mouvement	41
3,5 Girations permanentes naturelles	43
3,6 Mouvements non permanents — Stabilité de route.....	46
3,7 Phénomène d'autolouvoyage	50
3,8 Remarque sur l'effet de la vitesse	50
3,9 Correction de l'instabilité - Marche AR	51
PLANCHES	53
BIBLIOGRAPHIE	58

INTRODUCTION

Parmi les nombreuses qualités que marins et constructeurs désirent voir à leurs navires, la facilité de les faire tourner ainsi que leur stabilité de route occupent une place importante. L'étude de ces « qualités évolutives » a été pour cette raison entreprise depuis longtemps par la théorie et surtout expérimentalement.

A la base de cette étude se trouve évidemment celle des forces qui s'exercent sur un navire en mouvement. Ces forces proviennent de nombreux facteurs que nous pouvons résumer ainsi :

1° forces s'exerçant sur la surface de la carène au cours d'un mouvement donné (mouvement permanent de translation ou de giration, mouvement varié);

2° forces s'exerçant sur le gouvernail (pour différents types de gouvernails) et interaction entre carène et gouvernail;

3° poussée des hélices pour un couple donné aux arbres moteurs et au cours d'un mouvement donné. Interaction entre hélice-carène-gouvernail;

4° influence de facteurs que nous appellerons secondaires, bien que l'expérience en montre l'importance, tels que les vagues produites par le navire et les mouvements de tangage, roulis et pilonnement, affectant sa bande, son assiette ou la hauteur de son centre de gravité.

Il est clair que lorsque ces forces sont connues, l'étude de la giration se ramène à un simple problème de dynamique du solide. Jusqu'à maintenant les divers auteurs qui ont fait cette étude se sont contentés de résoudre ce problème à l'aide d'une estimation plus ou moins grossière des forces mises en jeu; soit en se bornant à donner leur allure générale [11] à l'aide de quelques remarques simples, soit en partant de résultats expérimentaux et, par suite, particuliers à tels navires [3].

Les deux premiers chapitres de cet ouvrage sont consacrés à la détermination théorique des forces hydrodynamiques s'exerçant sur la surface de la carène au cours d'un mouvement permanent de translation ou de giration, et à la vérification expérimentale de ces résultats. Le troisième chapitre traite le cas du mouvement varié et applique l'ensemble des résultats obtenus au problème de la giration.

BASES DE LA THÉORIE

Le navire considéré comme surface portante.

Un navire en giration permanente naturelle est soumis à une force hydrodynamique passant par le centre de gravité. La composante de cette force perpendiculaire

à la vitesse est nécessairement différente de zéro : c'est le produit de la masse du navire par l'accélération du centre de gravité qui n'est pas nul] puisqu'il y a giration. Cette force perpendiculaire à la vitesse est donc une *portance*.

L'idée fondamentale de cette étude, due à M. BRARD [1], est alors de considérer le navire comme une surface portante et d'adapter au navire la théorie de l'aile d'avion.

Malheureusement nous ne pouvons retenir de la théorie classique de l'aile que les idées directrices et non pas les résultats ni même les méthodes de calcul qui résultent d'hypothèses simplificatrices inadmissibles dans le cas du navire. Examinons rapidement pourquoi.

Une première différence provient de ce que l'écoulement possède une *surface libre* sur laquelle le navire provoque des vagues d'accompagnement. Nous admettrons que ces vagues sont sans influence importante sur les forces hydrodynamiques étudiées et qu'elles n'intéressent que les phénomènes secondaires rappelés ci-dessus.

Pour notre calcul nous admettrons que la surface libre reste plane et que nous pouvons compléter l'écoulement par son image par rapport à elle. La surface libre deviendra une surface de courant. Le navire, dont seule la partie immergée nous intéresse, sera complété par son symétrique par rapport au plan de flottaison et considéré en eau infinie. Ainsi complété il sera assimilé à une aile dont l'*envergure relative* est alors le rapport de deux fois le tirant d'eau à la longueur. Or, ce rapport est de l'ordre du dixième, alors qu'il est rarement inférieur à 5 pour une aile d'avion ordinaire. C'est dans ces ordres de grandeur que réside toute la différence.

D'une part, les effets marginaux deviennent prépondérants : la dérive étant toujours différente de zéro pour une giration naturelle, l'eau tend à passer sous la carène du bord extérieur au bord intérieur. Cette circonstance intéresse tout l'écoulement autour de la carène alors que la même tendance de l'air à passer de l'intrados à l'extrados d'une aile ordinaire n'intéresse que le voisinage des extrémités de l'aile. Ce qui, dans la théorie classique, n'intervient que comme terme correctif devient ici le terme prépondérant.

D'autre part, et en conséquence de cet effet, nous ne pouvons plus considérer la portion d'aile comprise entre deux plans voisins normaux à l'envergure comme un tronçon d'aile d'envergure infinie sous une incidence efficace constante d'une extrémité à l'autre.

RAPPEL DES IDÉES DIRECTRICES DE LA THÉORIE CLASSIQUE

JOUKOWSKI, le premier, imaginé un schéma tourbillonnaire dans la théorie de l'hélice propulsive. La réalité d'un champ de tourbillons libres apparaissait nécessairement puisque le théorème du moment cinétique montre que l'hélice met l'eau en rotation et que la circulation autour de cylindres coaxiaux à l'hélice est différente de zéro derrière l'hélice. Ces tourbillons se refermant sur les pales de l'hélice créent leur portance en vertu du théorème de KUTTA et JOUKOWSKI. La théorie de PRANDTL pour l'aile d'envergure limitée ne diffère de celle de JOUKOWSKI que par la nature du mouvement d'entraînement. Les filets tourbillonnaires partent de l'infini aval et y retournent après avoir traversé l'aile. A l'extérieur de celle-ci, ils sont tangents en chacun de leur point à la vitesse relative de la particule fluide située en ce point. L'intensité de ce champ tourbil-

lonnaire est donnée, en vertu des théorèmes de LAGRANGE et d'HELMHOLTZ, à partir des circulations autour de contours fermés entourant l'aile. Pour calculer celles-ci en fonction de la forme géométrique de l'aile, PRANDTL fait un certain nombre d'hypothèses : il introduit la notion d'aile élémentaire (portion de l'aile comprise entre deux plans voisins perpendiculaires à l'envergure) et l'assimile à un tronçon d'aile d'envergure infinie, attaquée par un courant qu'il admet uniforme et dont la vitesse est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse moyenne « induite » par le champ tourbillonnaire sur l'aile élémentaire envisagée. Pour faire le calcul de cette vitesse induite, il admet encore que les filets tourbillonnaires libres sont parallèles à la vitesse du courant à l'infini. C'est ainsi que s'introduit la théorie du segment portant, justifiée par la faible profondeur de l'aile devant son envergure (fig. 1).

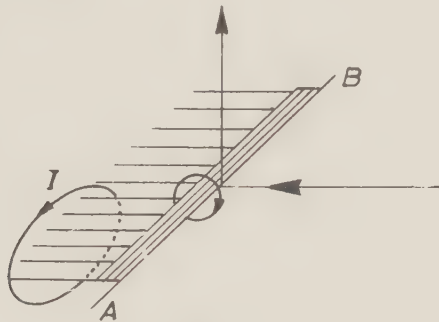


Fig. 1

Ce schéma initial fut ensuite perfectionné par une correction pour tenir compte des extrémités des ailes, mais les hypothèses précédentes restent consenties.

D'un autre côté, la théorie de « l'aile fluide » de M. ROY [4] apporte une justification de ce qui précède en montrant l'équivalence mathématique, pour l'écoulement extérieur à l'aile, entre les tourbillons fictifs concentrés intérieurs et une couche tourbillonnaire placée sur l'aile. Ce procédé mathématique permet d'utiliser les formules de POINCARÉ pour calculer les vitesses du fluide en un point quelconque de l'écoulement. En outre, ce sont ces tourbillons « liés » ou « asservis » qui transmettent à la surface portante les efforts aéro- ou hydrodynamiques.

La raison physique de ce résultat se trouve contenu dans la théorie de la couche limite que PRANDTL introduisit en 1911 pour calculer la résistance à l'avancement. Lorsque la viscosité cinématique ν tend vers zéro, la distance de la paroi solide S_i à la surface extérieure de la couche limite tend vers zéro. Sur S_i la vitesse relative reste nulle, sur S_e elle reste égale à la vitesse du courant général. Pour $\nu = +0$, il y a discontinuité de vitesse tangentielle, le tourbillon reporté entre S_e et S_i croît indéfiniment, son flux à travers la couche limite restant fini. Cette couche limite infiniment mince réalise encore l'adhérence à la paroi et n'est autre que la couche tourbillonnaire introduite par M. ROY.

Ces conditions justifient ainsi l'emploi que l'on a fait dès le début de la théorie des fluides parfaits en hydrodynamique. L'idée pratique est que l'écoulement du fluide parfait est la limite de l'écoulement du fluide visqueux lorsque ν tend vers zéro et constitue alors une première approximation. On étudie à part l'influence de la viscosité, c'est-à-dire la résistance à l'avancement, en introduisant ensuite une couche limite.

Le problème des surfaces portantes, en fluide parfait, est ainsi ramené à la détermination de tourbillons « liés » à la surface (orthogonaux à la vitesse du fluide sur la surface) et des tourbillons libres, prolongeant les précédents, parallèles en chacun de leur point à la vitesse du fluide.

Ainsi posé mathématiquement pour une surface portante de forme quelconque, le problème n'est pratiquement résoluble qu'à l'aide d'hypothèses simplificatives.

C'est ainsi que M. J. LEGRAS [5] étudie les ailes de formes quelconques. Les résultats qu'il obtient ne peuvent cependant s'appliquer ici car l'une de ses hypothèses est que la distance du bord d'attaque au plan mené par le bord de fuite parallèlement à la vitesse d'entraînement reste petite devant l'envergure, ce qui lui permet d'admettre que la nappe des tourbillons libres est plane, ce que nous ne pouvons faire ici.

Nous sommes amenés à chercher un autre schéma tourbillonnaire qui soit adapté au navire.

SCHÉMA TOURBILLONNAIRE ADAPTÉ AU NAVIRE

Considérons un navire ayant une quille ou, plus généralement, des couples en V formant une arête $E'F'$ (prolongée par le gouvernail barre à zéro).

Nous représentons ce navire renversé sur la *figure 2*.

Soit $EE'F'F$ son plan longitudinal de symétrie EE' étant l'étrave.

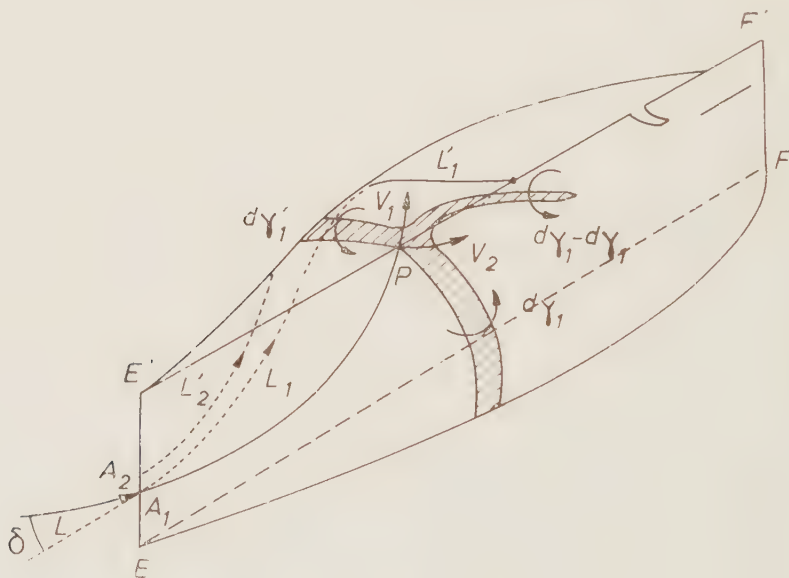


Fig. 2

Une ligne de courant L arrivant au voisinage de l'étrave en un point d'arrêt A_1 se sépare en L_1 et L'_1 qui aboutissent en P et Q sur l'arête ou sur le bord de fuite. Si la dérive n'est pas nulle, l'eau ayant tendance à passer sous le navire, la plupart des lignes de courant aboutissent sur l'arête.

En P, où la vitesse est V_1 , aboutit d'autre part une ligne de courant L'_2 provenant d'un autre point A_2 , et la vitesse sur cette ligne est V'_2 différente de V_1 . Il s'ensuit une discontinuité de vitesse, d'où un départ de tourbillon libre.

Tout le long de l'arête $E'F'$ s'échappent ainsi des tourbillons libres formant toute une nappe.

Les tourbillons liés forment sur la surface de la carène un système de trajectoires orthogonales aux lignes de courant. Entre les deux points P et P' de l'arête la circulation de la lanière de tourbillon libre est la différence entre les circulations des lanières de tourbillons liés qui y aboutissent de part et d'autre.

Dans le cas où le navire a des couples en U et ne possède donc pas d'arête saillante, l'eau glisse plus facilement sous la carène. Dans toute la région où la courbure est grande la vitesse varie très rapidement et favorise le décollement de la couche limite. Les tourbillons libres partiront de cette région et formeront non plus une nappe, mais tout un volume tourbillonnaire. La faible épaisseur de ce volume nous autorisera à la schématiser encore par une nappe (fig. 3).

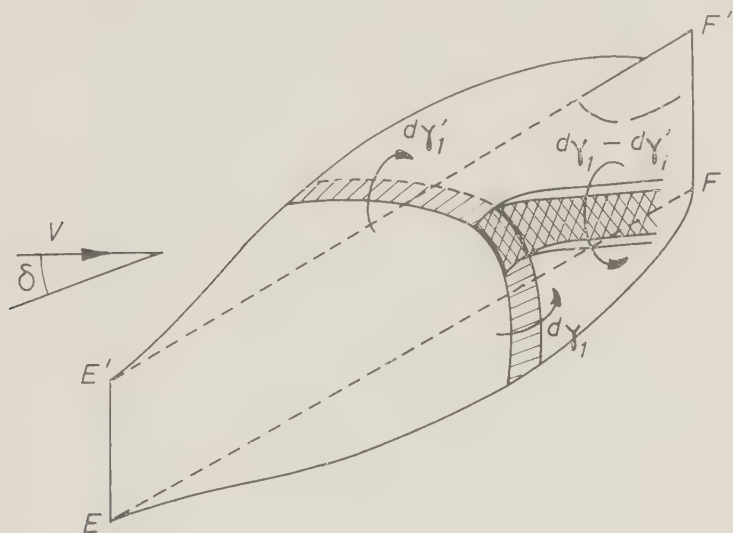


Fig. 3

La figure 4 met en évidence les lignes de courant sur un navire en giration. Elles ont été obtenues en enduisant la carène de larges bandes noires de peinture fraîche que l'eau par son passage a entraînée.

On voit nettement les lignes de courant se concentrer sur une ligne partant de l'étrave et légèrement inclinée sur l'axe du navire. C'est sur cette ligne que s'appuie la nappe de tourbillons. A quelque distance de l'étrave cette ligne s'évanouit : la présence de couples en U transforme cette nappe en un volume tourbillonnaire dont la trace n'est plus visible. En outre, comme nos calculs le montreront, l'intensité tourbillonnaire décroît rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'étrave.

Nous adopterons donc le schéma tourbillonnaire suivant (fig. 5), compte tenu du fait que nous ajoutons à l'écoulement son image par rapport à la surface libre : la partie immergée du navire et son symétrique par rapport à la surface libre sera remplacée par



Fig. 1.

son plan de symétrie, c'est-à-dire par le rectangle $E'F'F''E''$. Les tourbillons libres formeront deux nappes s'appuyant l'une sur $E'F'$, l'autre sur $E''F''$. La direction des tourbillons libres sera précisée dans chaque chapitre. Les tourbillons liés seront choisis verticaux. On sait qu'ils doivent être orthogonaux à la vitesse de l'eau sur la carène; la *figure 4* montre que cette approximation est suffisante.

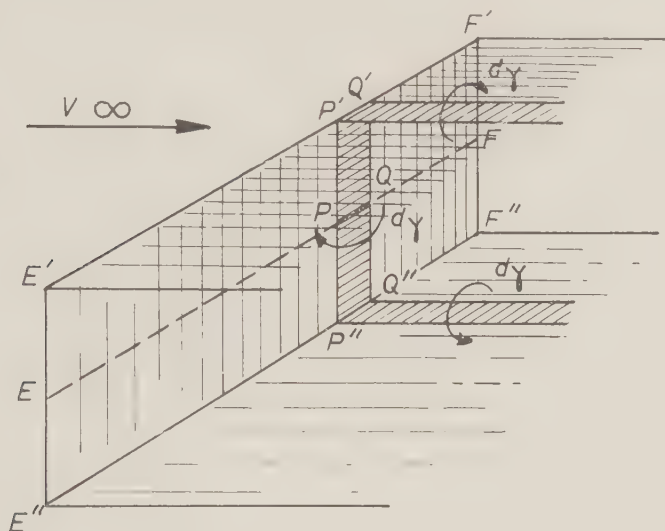


Fig. 5

Un tel schéma est évidemment insuffisant du point de vue mathématique (nous négligeons d'ailleurs les tourbillons libres s'échappant du bord de fuite), car il ne permettra pas d'obtenir, *sur toute la surface de la carène*, un écoulement qui lui soit tangent. Il permettra cependant d'obtenir les forces appliquées à la carène, en laissant indéterminés certains coefficients que des expériences simples permettront de calculer pour chaque navire.

CHAPITRE PREMIER

TRACTION EN DÉRIVE

1,1 Nous supposons dans ce chapitre que le navire possède seulement un mouvement de translation rectiligne et uniforme, dont la direction fait avec l'axe du navire un angle δ (angle de dérive). Nous nous proposons alors de calculer les forces hydrodynamiques s'exerçant sur le navire.

Ce problème est intéressant en lui-même, puisque les constructeurs de navires désirent connaître ces forces et qu'on les mesure au bassin des carènes pour des angles de dérive allant jusqu'à une vingtaine de degrés (circonstance qui nous permettra, en outre, de confronter nos résultats avec ces mesures).

Les remarques que nous ferons au cours de l'étude de ce premier problème nous seront fort utiles, d'autre part, lorsque nous aborderons au chapitre suivant le problème de la giration.

1,2 SCHÉMA TOURBILLONNAIRE DE LA TRACTION EN DÉRIVE

EE' et FF' étant les bords d'entrée et de fuite, nous admettons, comme il a été dit dans l'introduction, que les tourbillons liés sont répartis sur toute la surface parallèlement à EE' (fig. 6).

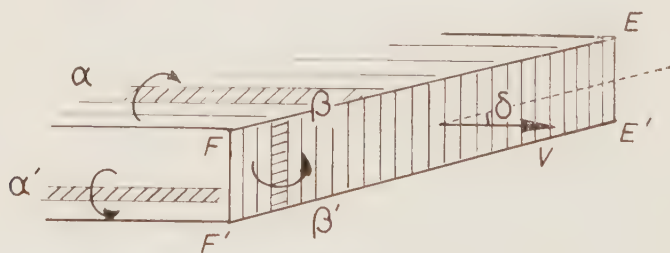


Fig. 6

Ces tourbillons se dégagent le long de EF et E'F' et deviennent des tourbillons libres, dont nous supposons d'abord que la direction est opposée à la vitesse de translation $\vec{V}$. (A la fin de ce chapitre, nous modifierons légèrement cette hypothèse.) Nous avons ainsi une infinité de lanières de tourbillons en fer à cheval telle que $\alpha\beta\beta'\alpha'$ (fig. 6).

Le principe du calcul sera alors le suivant : nous déterminerons l'intensité de chaque lanière par la condition que la vitesse résultante relative est tangente à la surface du navire. Comme il ne nous est pas possible avec le schéma adopté de satisfaire à cette condition sur toute la surface, nous l'écrirons seulement sur la ligne passant par les milieux de EE' et FF' (ligne de flottaison). L'intensité tourbillonnaire étant ainsi déterminée, les forces appliquées s'en déduisent simplement.

1,3

VITESSE INDUITE PAR LES TOURBILLONS

Il serait simple, pour calculer la vitesse induite en un point par une lanière de tourbillons, de commencer par évaluer l'angle solide dont on voit la lanière de ce point. Mais le calcul de la dérivée de cet angle solide étant fastidieux, bien qu'élémentaire, nous préférons calculer directement la vitesse induite par chacune des parties rectilignes de la lanière.

1,31 Vitesse induite par les tourbillons libres (fig. 7).

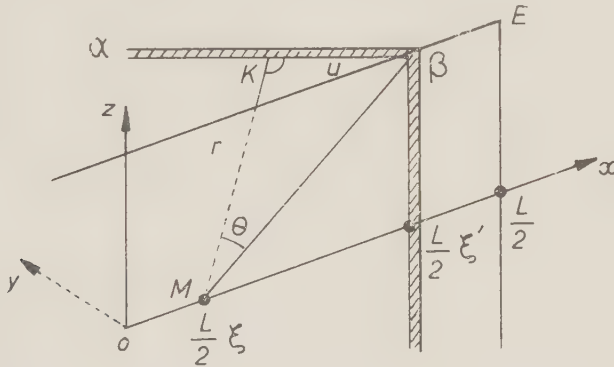


Fig. 7

O étant le centre du rectangle $EE'F'F$, Ox sera parallèle à FF , Oz (vertical) parallèle à $E'E$; Oy complète le trièdre direct. La vitesse de translation $\vec{V}$, dans le plan xOy , fait l'angle $-\delta$ avec Ox .

Soit $\beta\alpha$ une lanière de tourbillons libres. Posons $\frac{L}{2} \xi'$ l'abscisse de β , $\frac{L}{2} d\xi'$ la largeur de la lanière et $f(\xi') d\xi'$ son intensité ($-1 \leq \xi' \leq 1$). $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de la direction $\beta\alpha$ (qui est celle de $-\vec{V}$) la vitesse $d\vec{V}^{(1)}$ induite en un point M de Ox , d'abscisse $\frac{L}{2} \xi$, est :

$$d\vec{V}^{(1)} = \frac{\vec{u} \wedge \beta \vec{M}}{4\pi r^2} (1 + \sin \theta) \cdot f(\xi') d\xi'$$

avec, si K est la projection de M sur $\alpha\beta$:

$$r = MK = \sqrt{T^2 + \left[\frac{L}{2} \sin \delta (\xi' - \xi) \right]^2},$$

$$\sin \theta = \sin \beta MK = \frac{\frac{L}{2} \cos \delta (\xi' - \xi)}{\sqrt{T^2 + \left[\frac{L}{2} (\xi' - \xi) \right]^2}}.$$

En faisant la sommation pour toutes les lanières s'appuyant sur EF ainsi que pour celles de l'autre nappe, on obtient la vitesse induite en M par les tourbillons libres :

$$(1) \begin{cases} V_y^1 = 0, & V_x^1 = V_y^1 \operatorname{tg} \delta, \\ V_y^1 = -\frac{\cos \delta}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{T}{T^2 + \left[\frac{L}{2} \sin \delta (\xi' - \xi) \right]^2} \left(1 + \frac{\frac{L}{2} (\xi' - \xi) \cos \delta}{\sqrt{T^2 + \left[\frac{L}{2} (\xi' - \xi) \right]^2}} \right) f(\xi') d\xi'. \end{cases}$$

1,32 Vitesse induite par les tourbillons liés (fig. 8).

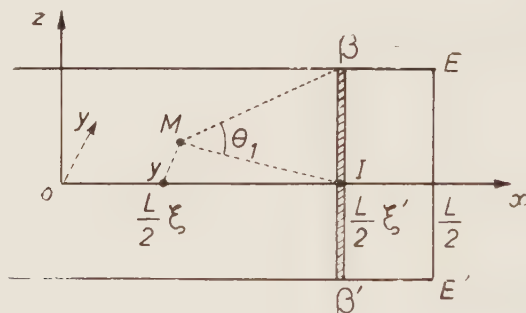


Fig. 8

Cette vitesse étant discontinue pour $y = 0$ nous la calculerons en $M \left(\frac{L}{2} \xi, y, 0 \right)$.

La vitesse induite par la lanière $\beta'\beta$ vue de M sous l'angle $2\theta_1$ est :

$$d\vec{V}^2 = \frac{\beta'\beta \wedge \vec{IM}}{4\pi |\beta'\beta| |\vec{IM}|^2} (2 \sin \theta_1) f(\xi') d\xi'.$$

En intégrant par rapport à ξ' nous aurons la vitesse induite en M par les tourbillons liés.

On a évidemment : $V_z^2 = 0$.

Calculons V_x^2 lorsque $y \rightarrow 0$. Posons :

$$G(\xi', \xi, y) = \frac{\sin \theta_1}{2\pi} f(\xi').$$

$$V_x^2 = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{2}{L} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{2y}{L}}{\left(\frac{2y}{L} \right)^2 + (\xi' - \xi)^2} G(\xi', \xi, y) d\xi'.$$

Or, il est facile de voir que si $\int_1^{n+1} G(\xi', \xi, y) d\xi' < \infty$ si G est continu par rapport à ξ' pour $\xi' = \xi$ et si $G(\xi', \xi, y)$ a une limite $G(\xi', \xi, 0)$ pour $y = 0$, alors :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^{n+1} \frac{y G(\xi', \xi, y)}{y^2 + (\xi' - \xi)^2} d\xi' = \begin{cases} \pi G(\xi, \xi, 0) & \text{si } y = +0 \\ -\pi G(\xi, \xi, 0) & \text{si } y = -0 \end{cases}$$

ce qui nous donne ici :

$$(2) \quad \begin{cases} V_x^2 = -\frac{f(\xi)}{L} & \text{sur } y = +0; \\ V_x^2 = +\frac{f(\xi)}{L} & \text{sur } y = -0. \end{cases}$$

la vitesse normale V_y^2 a pour valeur :

$$V_y^2(\xi, y) = \frac{1}{\pi L} \int_{-1}^{n+1} \frac{\xi - \xi'}{L^2 + (\xi' - \xi)^2} \sqrt{T^2 + y^2 + \left[\frac{L}{2}(\xi' - \xi)\right]^2} f(\xi') d\xi'.$$

Cette intégrale n'a pas de sens pour $y = 0$, mais elle reste finie lorsque $y \rightarrow 0$ si $\xi \neq \pm 1$. Cette limite tend vers zéro avec T et comme nous avons supposé $\frac{T}{L}$ petit, nous voyons que V_y^2 est petit devant V_y^1 qui reste fini et non nul si T tend vers zéro.

Nous pourrions donc négliger V_y^2 lorsque, d'abord, nous supposerons T infiniment petit au § 1,5.

Mais il convient de regarder de plus près lorsque nous supposerons dans la suite T petit et non infiniment petit, car il y a dans l'expression (1) de $V_y^{(1)}$ un terme, provenant du second terme de la parenthèse, qui lui aussi est petit avec T , que nous ne négligeons pas et qui a pour valeur :

$$\frac{\cos^2 \delta}{2\pi} \int_{-1}^{n+1} \frac{T}{T^2 + \left[\frac{L}{2} \sin \delta (\xi' - \xi)\right]^2} \frac{\frac{L}{2}(\xi' - \xi)}{\sqrt{T^2 + \frac{L}{2}(\xi' - \xi)^2}} f(\xi') d\xi'.$$

Or, ce terme est bien supérieur à V_y^1 lorsque $\sin \delta$ est petit.

Par conséquent nous pouvons négliger V_y^2 dans les deux cas suivants T infiniment petit ou $\sin \delta$ petit. Ce sont précisément les deux cas où nous nous placerons.

Evidemment, pour $\xi = \pm 1$, $V_y^{(2)}$ n'est plus négligeable, mais infini si $f(\pm 1) \neq 0$. Cela nous montre que f doit s'annuler aux extrémités $\xi = \pm 1$. Or, la solution que nous trouverons, en négligeant $V_y^{(2)}$, nous donnera $f(+1)$ infini. Ce n'est pas une difficulté : la solution exacte donnerait f très grand au voisinage de 1 et s'annulant très rapidement. Il n'y a pas d'inconvénient, au contraire, à conserver f infini. Cela correspond à des tourbillons concentrés qui sont très maniables.

Comme il a été dit en 1,2, nous déterminerons $f(\xi)$ en écrivant que la vitesse normale résultante est nulle :

$$(3) \quad V_y^1 + V \sin \delta = 0.$$

En remplaçant V_y^1 par sa valeur, cette équation devient une équation intégrale que nous résoudrons dans les paragraphes suivants.

La vitesse résultante relative est alors tangentielle et il vient :

$$V_x = -V \cos \delta + V_x^1 + V_x^2,$$

or, $V_x^1 = -V \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta}$ en vertu de (1) et (3), et compte tenu de (2) il vient :

$$(4) \quad \begin{cases} V_x = -\frac{V}{\cos \delta} - \frac{f(\xi)}{L} & \text{sur } y = +0, \\ V_x = -\frac{\cos \delta}{V} + \frac{f(\xi)}{L} & \text{sur } y = -0. \end{cases}$$

en un point d'abscisse ξ , il y a donc une différence de pression égale à :

$$\frac{1}{2} \rho V^2 \left(\frac{1}{\cos \delta} + \frac{f(\xi)}{L} \right)$$

d'où une force résultante normale :

$$(5) \quad Y = \frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{2}{L \cos \delta} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\xi)}{V} d\xi$$

et un moment résultant, par rapport au centre :

$$(6) \quad N = \frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{1}{\cos \delta} \int_{-1}^{+1} \xi \frac{f(\xi)}{V} d\xi.$$

Le point d'application de cette force hydrodynamique est donc à une distance $x_0 = \frac{L}{2} \xi_0$ du centre égal à :

$$(7) \quad \xi_0 = \frac{\int \xi f d\xi}{\int f d\xi}.$$

Enfin, le coefficient de portance $C_y = \frac{Y \cos \delta}{\frac{1}{2} \rho S V^2}$ a pour expression :

$$(8) \quad C_y = \frac{2}{LV} \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi.$$

Nous allons maintenant, en résolvant l'équation (3), calculer ξ_0 et C_y que nous comparerons aux valeurs expérimentales.

Nous ne pouvons pas espérer avoir la solution explicite de l'équation (3). Cette solution a une allure différente suivant que la dérive δ est très faible (de 0° à 2°), moyenne de 2° à 20° ou très grande.

Nous allons former une solution approchée pour chacun de ces trois cas, en commençant par le dernier, le plus simple.

1,5

SOLUTION POUR UNE GRANDE DÉRIVE

Nous avons supposé $\frac{2T}{L}$ petit. Il est naturel de regarder la solution que l'on obtient lorsque cette quantité est infiniment petite. La limite de V_y^1 donnée par (1) est $-\cotg \delta \frac{f(\xi)}{L}$, et l'équation (3) donne alors la *répartition constante* de tourbillons :

$$(9) \quad f(\xi) = VL \frac{\sin \delta}{\cos \delta}$$

d'où :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{1}{2} \rho SV^2 4 \operatorname{tg}^2 \delta; \\ N = 0, \quad \xi_0 = 0; \\ C_y = 4 \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta}, \quad C_x = 4 \frac{\sin^3 \delta}{\cos^2 \delta}. \end{array} \right.$$

La polaire complète est une courbe asymptote à l'infini à la parabole $C_y^2 = 4 C_x$.

A l'origine le rayon de courbure est nul.

Pour la construire, on remarque que OP étant le rayon vecteur de la parabole, H la projection de P sur l'axe C_x , OM = OH (fig. 9).

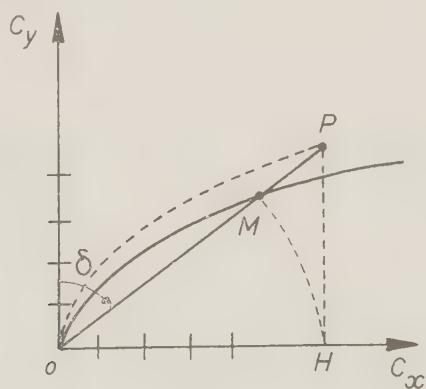


Fig. 9

Pour nous rendre compte de l'utilisation éventuelle de cette courbe cherchons une correction des formules précédentes pour $\frac{2T}{L}$ petit et non infiniment petit.

En fait, le développement se fait en fonction de la quantité $\varepsilon_1 = \frac{2T}{L \sin \delta}$.

Si nous négligeons les termes en ε_1^2 , nous obtenons :

$$V_y^{(1)} = -\frac{\cotg \delta}{\pi L} \left\{ \pi f(\xi) + \varepsilon_1 \left[f'(\xi) \cdot L \frac{1-\xi}{1+\xi} - f(1) \frac{1+\cos \delta}{1-\xi} - f(-1) \frac{1-\cos \delta}{1+\xi} \right] \right\}.$$

Le calcul, d'ailleurs élémentaire, suppose seulement f continu. Nous le vérifierons *a posteriori*.

L'équation (3) s'écrit alors :

$$f(\xi) + \frac{\varepsilon_1}{\pi} \left[f'(\xi) L \frac{1-\xi}{1+\xi} - f(1) \frac{1+\cos \delta}{1-\xi} - f(-1) \frac{1-\cos \delta}{1+\xi} \right] = VL \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta}.$$

$f(\xi)$ étant continu, on voit qu'il est nécessaire que $f(1)$ et $f(-1)$ soient nuls. On est ramené à résoudre l'équation linéaire :

$$(11) \quad f(\xi) + \frac{\varepsilon_1}{\pi} f'(\xi) L \frac{1-\xi}{1+\xi} = VL \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta}$$

avec les deux conditions (compatibles) $f(\pm 1) = 0$.

La solution est :

$$f(\xi) = VL \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta} \left(1 - e^{\frac{\pi}{\varepsilon_1} \int_{|\xi|}^1 \frac{dx}{L \frac{1-x}{1+x}}} \right).$$

On a tracé sur le graphique de la planche I les courbes $f(\xi)$ pour différentes valeurs de ε_1 . Ces courbes ont un maximum pour $\xi = 0$ dont la valeur est précisément la valeur de f donnée par (9). Si $\Lambda(\varepsilon_1)$ est le rapport de la surface limitée par cette courbe et l'axe des ξ , à la surface du rectangle dans laquelle elle s'inscrit, on voit que Y , C_y et C_x sont égaux aux valeurs (10), multipliées par Λ . Sur le graphique de la planche II, un abaque donne Λ en fonction de $\frac{2T}{L}$ et δ .

Ces différents graphiques, joints au fait que nous avons négligé ε_1^2 , montre que ces résultats ne peuvent être employés que si ε_1 est inférieur à 1/10 environ.

Or, pour les navires, $\frac{2T}{L}$ est de l'ordre de 1/10. Il faut donc que δ soit voisin de 90°, ce qui est beaucoup trop grand pour avoir quelque utilité. Ces formules ne pourraient s'appliquer avec intérêt qu'à des navires (hypothétiques) ou à des ailes dont l'envergure relative $\frac{2T}{L}$ serait de l'ordre du centième. Pour de tels navires, la force hydrodynamique est appliquée au centre, dès que la dérive est d'une dizaine de degrés.

Remarquons encore que pour de tels navires de très faible tirant d'eau, Λ décroît lorsque $\frac{2T}{L}$ augmente, donc aussi C_y et C_x . Nous verrons que c'est tout le contraire pour des navires normaux et une faible dérive.

1.6

SOLUTION POUR UNE DÉRIVE QUELCONQUE

Posons : $\varepsilon = \frac{2T}{L}$, $\eta = \frac{\varepsilon}{\sin \delta}$

et :

$$(12) \quad f(\xi) \equiv \frac{\pi V L}{2} \varepsilon \operatorname{tg} \delta \varphi(\xi).$$

L'équation (3) s'écrit alors :

$$(13) \quad \int_{-1}^{+1} \Lambda(\xi' - \xi) \cdot \varphi(\xi') d\xi' = 1.$$

avec :

$$(14) \quad \Lambda(u) \equiv \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\eta^2 + u^2} \left(1 + \frac{u \cos \delta}{\sqrt{\varepsilon^2 + u^2}} \right).$$

Les formules (5), (6), (7) et (8) s'écrivent alors, en fonction de φ :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \pi \varepsilon \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi; \\ N = \frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \pi \varepsilon \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \xi \varphi(\xi) d\xi; \\ \xi_0 = \frac{\int_{-1}^{+1} \xi \varphi(\xi) d\xi}{\int_{-1}^{+1} \varphi d\xi}; \\ C_y = \pi \varepsilon \operatorname{tg} \delta \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi. \end{array} \right.$$

Pour nos calculs nous fixerons ε à la valeur 0,1 qu'il possède dans la pratique.

1.62 Valeurs de C_y pour une dérive très faible.

Remarquons que si $u > 0$ et δ voisin de zéro, la parenthèse qui se trouve dans l'expression de $\Lambda(u)$ est voisine de 2. Comme d'autre part η est très grand, $\Lambda(u)$ est voisin de 1. En faisant $\xi = -1$ dans l'équation (13) nous obtenons alors :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi d\xi = 1$$

donc :

$$C_y = \pi \varepsilon \operatorname{tg} \delta$$

pour δ voisin de zéro.

Lorsque δ augmente, $\Lambda(u)$ devient inférieur à 1 et si φ est positif, nous aurons, d'après (13) :

$$C_y > \pi \varepsilon \operatorname{tg} \delta.$$

Nous avons porté sur le graphique de la planche III la courbe $\pi \varepsilon \operatorname{tg} \delta$. Sur le même graphique les résultats d'expériences faites au bassin des carènes sur quatre navires différents pour lesquels les valeurs de ε sont 0,105 ; 0,106 ; 0,11 et 0,14.

On voit que la valeur (16) de C_y est acceptable jusqu'à $\delta = 10^\circ$ et qu'au-delà, l'écart a bien le sens prévu.

1,63 Calcul de la répartition des tourbillons.

Si la remarque précédente nous a permis d'obtenir sans calcul la valeur de C_y , elle ne nous renseigne pas sur la répartition des tourbillons ni, par suite, sur la position du point d'application de la force hydrodynamique. Pour avoir ces renseignements, il nous faut résoudre l'équation (13). Notre but est de trouver un procédé de résolution à la fois rapide et de précision suffisante.

Nous devons, en effet, refaire les opérations pour chaque angle de dérive, et la rapidité du procédé n'est pas sans importance pratique.

Nous avons tout d'abord tracé sur le graphique de la planche IV les courbes $A(u)$ pour différentes valeurs de δ , en choisissant, comme nous l'avons dit, $\varepsilon = 0,1$.

Toutes ces courbes sont égales à 0,5 pour $u = 0$, sont pratiquement confondues pour $u < 0$ et s'annulent très vite; pour $u > 0$, $A(u)$ augmente rapidement, passe par un maximum inférieur à 1 et décroît ensuite d'autant plus lentement que δ est petit.

Rappelons que ces courbes indiquent, à un facteur près, la vitesse normale induite par un tourbillon concentré en fer à cheval, incliné de δ , à une distance u du petit côté du fer à cheval [$A(u)$ reste borné car nous avons négligé la vitesse induite par le côté du tourbillon] (*fig. 10*).

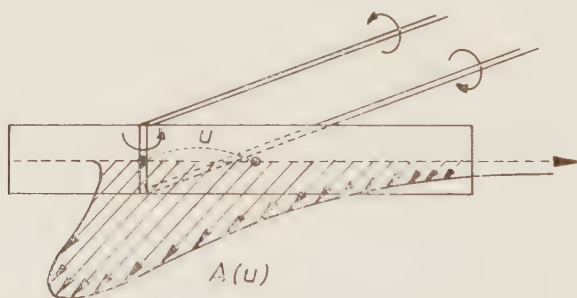


Fig. 10

1,631 DÉRIVE NULLE.

Lorsque la dérive δ tend vers zéro, C_y tend aussi vers zéro, mais φ ne s'annule pas et ξ_0 tend vers une position limite que nous nous proposons de déterminer.

δ étant nul, $A(u)$ a la forme (1). La solution exacte correspondante ne pouvant pratiquement être exprimée, nous allons comparer les solutions obtenues en remplaçant la forme (1) par les formes voisines (2) ou (3) composées de lignes droites. Notons que la forme (2) est exacte pour $\varepsilon = 0$ (*fig. 11*).

Pour la forme (2), la solution est immédiate : $\varphi(\xi)$ est une fonction de DIRAC

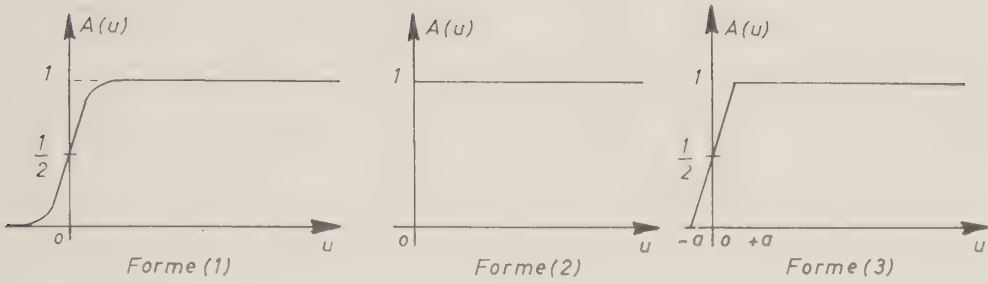


Fig. 11

$\delta(1 - \xi)$, ce qui donne un *tourbillon unique* concentré sur l'avant du navire. Un tel tourbillon induit en effet partout une vitesse normale constante, compte tenu de la simplification. Cette solution nous donne $\xi_0 = 1$, valeur presque acceptable puisque, expérimentalement, on a $\xi_0 = 1,1$ à $1,2$.

Pour la forme (3), où $A(u)$ varie linéairement de 0 à 1 pour $-a < u < a$ et $A(u) = 1$ pour $u > a$, il est facile de transformer l'équation (13) en une équation différentielle et l'on constate qu'il n'y a pas de solution continue. On peut cependant former une infinité de solutions différentes à l'aide de tourbillons concentrés. Une solution consiste, par exemple, à mettre des tourbillons d'intensité 2 alternativement positifs et négatifs aux points d'abscisse $1, 1 - a, 1 - 2a$, etc. Une autre à mettre des tourbillons d'intensité

4, alternativement positifs ou négatifs aux points d'abscisse $1 - \frac{a}{2}, 1 - a, 1 - \frac{5a}{2}, 1 - 3a$, etc.

Ces solutions donnent :

$$\int \varphi d\xi = \begin{matrix} 0 & \text{ou} & 2 & \text{pour la première;} \\ 0 & \text{ou} & 4 & \text{pour la seconde,} \end{matrix}$$

suivant la valeur de a , et ξ_0 soit voisin de zéro, soit infini.

Ces solutions sont évidemment trop étranges pour pouvoir être retenues. Il est pourtant simple de voir que ce sont les seules si nous supposons que les tourbillons se forment *sur le navire*.

On est conduit à admettre que les tourbillons peuvent se produire en avant du navire. La solution la plus simple consiste alors en un tourbillon unique, précédent le navire de la distance a (fig. 12). Cette solution tend bien vers celle de la forme (2) lorsque $a \rightarrow 0$.

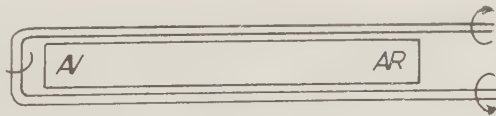


Fig. 12

On obtient alors : $\xi_0 = 1 + a$

où a est de l'ordre de ε et cette valeur correspond bien à la valeur expérimentale.

Conclusion.

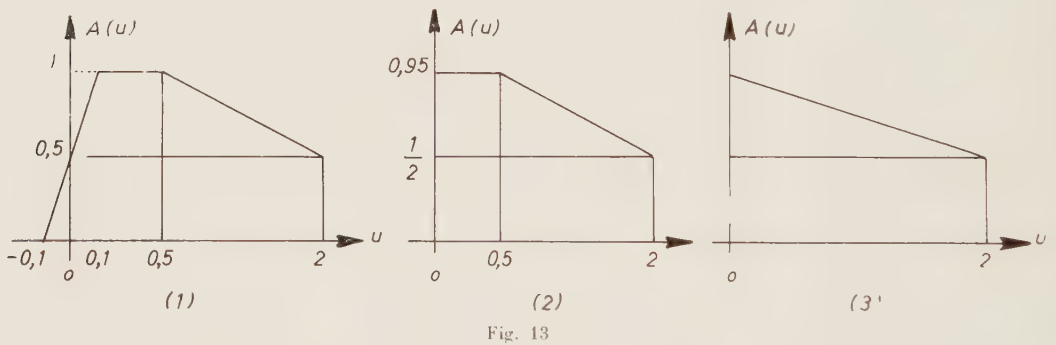
1° La solution exacte de l'équation (13) donne, sans doute, des tourbillons légèrement étalés au lieu de tourbillons concentrés. L'étude précédente nous montre cependant que, conformément à l'expérience, la limite du point d'application précède légèrement le navire d'une fraction de l'envergure;

2° dans la suite, nous ne retiendrons pas les solutions qui donneraient des tourbillons concentrés alternativement positifs et négatifs. La partie inclinée de la courbe $A(u)$ sera négligée. Il n'en résultera pas de différence sensible pour C_y et l'effet de cette pente sera d'augmenter la valeur trouvée pour ξ_0 d'une fraction de ε .

1,632 DÉRIVE QUELCONQUE.

Le même examen critique doit être fait pour chaque dérive puisque le noyau change chaque fois. Nous avons remplacé $A(u)$ par diverses courbes formées de segments de droites et comparés, d'une part les résultats obtenus, d'autre part la longueur du calcul, pour une dérive de $2^\circ 50'$ donnant $\eta = 2$.

La forme exacte (voir graphique, planche IV) a été remplacée successivement par les trois formes ci-après (fig. 13).



La forme (1) a été écartée, donnant des tourbillons alternativement positifs et négatifs.

Les formes (2) et (3) ont donné les résultats voisins suivants :

	forme 2	forme 3
$\int \varphi d\xi$	1,58	1,65
ξ_0	0,58	0,576

N'oublions pas que ξ_0 doit être augmenté sensiblement de ε soit $\xi_0 = 0,7$.

Les calculs relatifs à la forme (3) étant les plus simples, c'est cette forme que nous retiendrons.

Si $A(u) = a - bu$ pour $u > 0$ et $A(u) = 0$ pour $u < 0$ on trouve facilement que φ ne peut être continu pour $\xi = 1$ et la solution se compose d'une fonction de DIRAC, en ce point, et d'une fonction exponentielle :

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{a} \delta (1 - \xi) + \frac{b}{a^2} e^{+\frac{b}{a}(1-\xi)}.$$

La solution est constituée par conséquent d'un tourbillon concentré sur l'avant et de tourbillons répartis avec une densité croissante vers l'arrière (fig. 14). On obtient les résultats indiqués pour $a = 1$, $b = 1/4$.

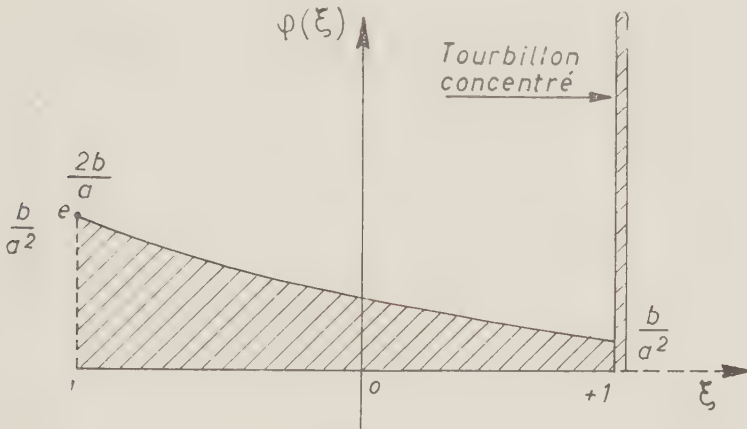


Fig. 14

1,64 Critique de ces résultats.

Qualitativement, ces résultats sont satisfaisants. En effet, on voit que C_y est croissant avec δ et que ξ_0 est décroissant.

Pour l'exemple précédent les valeurs expérimentales sont environ 1,2 au lieu de 1,65 et 0,8 à 0,9 au lieu de la valeur 0,7 pour ξ .

On voit que pour C_y la valeur simplifiée trouvée au paragraphe 1,62 convient mieux que la valeur obtenue maintenant.

Cela s'explique aisément ainsi :

— nous supposons dans notre schéma (fig. 15) que les tourbillons quittent la carène en faisant avec elle l'angle δ , dès le départ. Si cette inclinaison est bonne à l'infini, il est évident que près de la carène, l'angle δ' est inférieur à δ .

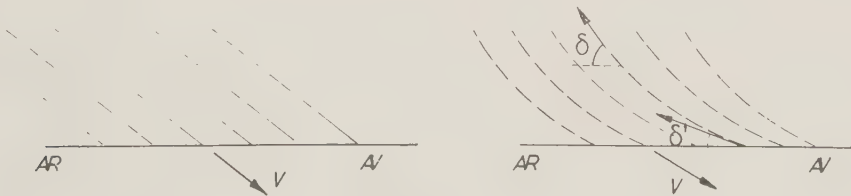


Fig. 15

En effet, plaçons-nous en deux points situés en arrière de la carène, dans la région des tourbillons libres. En l'un, abrité par la carène, la vitesse est tangentielle,

en l'autre, non abrité, la vitesse est sensiblement celle du courant. Le tourbillon doit être la bissectrice de ces deux directions, donc :

$$\delta' \simeq \frac{\delta}{2}.$$

La solution serait donc intermédiaire entre les deux valeurs limites trouvées. On voit que les résultats expérimentaux se situent bien entre ces valeurs.

Nous tiendrons compte de l'ensemble de ces remarques pour aborder le chapitre suivant.

FORCES HYDRODYNAMIQUES EXERCÉES SUR UN NAVIRE EN GIRATION FORCÉE

2,1 Nous abordons maintenant un problème plus important dont la solution nous permettra d'étudier la giration naturelle d'un navire.

Nous nous proposons de calculer les forces hydrodynamiques s'exerçant sur un navire qui possède un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. Nous supposons que ce mouvement est établi depuis un temps suffisant pour que l'écoulement autour du navire soit permanent.

Un tel mouvement est déterminé par trois paramètres, le *rayon de giration* R , la *dérive* δ , et la vitesse V du centre de gravité (*fig. 16*), ainsi définis :

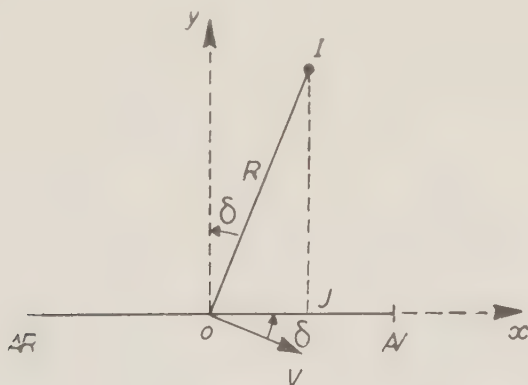


Fig. 16

— O étant le centre de gravité, Ox l'axe du navire, Oz vertical, l'axe de rotation coupe xOy en I, *centre de giration*. On a :

$$R = OI, \quad \delta = (\vec{V}, \vec{Ox}).$$

Notons qu'on appelle *point giratoire* J la projection de I sur l'axe Ox. C'est le point dont la vitesse est dirigée suivant l'axe du navire.

Dans les girations naturelles, R n'est jamais inférieur à quatre fois environ la longueur du navire.

D'autre part, le point giratoire est toujours sur l'avant du navire à une distance de l'avant de l'ordre du dixième de la longueur (c'est au voisinage de ce point qu'il y a intérêt à placer la passerelle). Cela montre que la dérive est toujours assez faible, inférieure à une dizaine de degrés. C'est dans ces ordres de grandeur que nous nous placerons ici, bien qu'évidemment on puisse donner à R et δ , dans une giration forcée, toute valeur que l'on désire.

2,12 Schéma tourbillonnaire de la giration.

Pour la traction en dérive, chaque point du navire ayant même vitesse d'entraînement $\vec{V}$, nous avons admis que les tourbillons libres étaient tous parallèles entre eux et opposés à la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire faisaient avec l'axe des x un angle égal à $\pi - \delta$. Nous avons vu ensuite comment cette hypothèse pouvait être modifiée et qu'il était préférable de prendre un angle égal à $\pi - \frac{\delta}{2}$.

Dans une giration, un point d'abscisse réduite ξ a une vitesse d'entraînement dont la direction dépend de ξ , soit $\theta(\xi)$. (On a $\theta(0) = \delta$, $\theta(\xi_J) = 0$, ξ_J étant l'abscisse du point J.) Nous ferons l'hypothèse que le tourbillon libre s'échappant du point d'abscisse ξ , faite avec Ox l'angle $\pi - \frac{\theta(\xi)}{2}$.

On voit alors que si $\frac{R}{L}$ est grand, δ petit, l'angle θ reste petit et les tourbillons libres sont très peu inclinés sur le navire (*fig. 17*). Nous ferons alors les calculs dans cette première hypothèse et prendrons $\theta \equiv 0$. Cela nous permettra d'obtenir rapidement une expression des forces appliquées valable pour $\frac{R}{L}$ assez grand. Au paragraphe 3, nous ferons les calculs pour R quelconque, c'est-à-dire en tenant compte de cet angle θ .

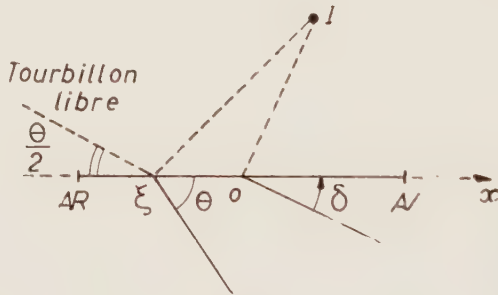


Fig. 17

2,2

CAS DES GRANDS RAYONS DE GIRATION

2,21 $\vec{\omega}$ étant le vecteur rotation de module $\omega = \frac{V}{R}$, la vitesse d'un point M du navire est $\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{JM}$.

Cette vitesse a comme projections sur les axes les quantités :

$$(1) \quad V \cos \delta, \quad V \frac{L}{2R} (\xi - \xi_J), \quad 0,$$

$\frac{L}{2} \xi$ étant l'abscisse du point M, $\frac{L}{2} \xi_J$ celle du point J.

La vitesse normale de l'eau sur le navire doit donc être $\frac{VL}{2R} (\xi - \xi_J)$.

Or, cette vitesse normale est la vitesse induite par les tourbillons libres et d'après (1,1) vaut :

$$\frac{2}{\pi L \varepsilon} \int_{-1}^{+1} A(\xi', \xi) f(\xi') d\xi',$$

f et A ayant même signification qu'au chapitre premier. L'intensité f des tourbillons sera déterminée par l'équation intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} A(\xi', \xi) f(\xi') d\xi' = \pi \varepsilon V \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2R} (\xi - \xi_J)$$

ou, en posant :

$$f(\xi) = \pi \varepsilon V \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2R} \cdot \varphi(\xi);$$

$$\int_{-1}^{+1} A \varphi d\xi' = \xi - \xi_J.$$

D'après les hypothèses faites, le noyau $A(u)$ est sensiblement égal à 1 pour u positif et est nul pour $u < 0$.

Nous avons donc à résoudre :

$$\int_{\xi}^{+1} \varphi(\xi') d\xi' = \xi - \xi_J.$$

La solution est :

$$(2) \quad \varphi(\xi) = (1 - \xi_J) \delta(1 - \xi) - 1,$$

$\delta(x)$ étant la fonction de DIRAC.

Les tourbillons se composent donc d'un tourbillon concentré sur l'avant, de circulation finie (nulle dans le cas particulier où $\xi_J = 1$) et d'une répartition uniforme de tourbillons tout le long du navire.

2,22

FORCE HYDRODYNAMIQUE ET POINT D'APPLICATION.

La vitesse tangentielle induite par les tourbillons libres précédents est nulle. Celle qui provient des tourbillons liés est, d'après les calculs antérieurs, égale à $\pm \frac{f(\xi)}{L}$ de part et d'autre du plan de symétrie longitudinal du navire.

La vitesse d'entraînement tangentielle étant égale à $V \cos \delta$, il vient en définitive pour la vitesse tangentielle de l'eau sur la carène :

$$V_t = V \cos \delta \pm \frac{f(\xi)}{L}.$$

Puisque nous sommes en présence d'un mouvement relatif permanent, il est immédiat de calculer la différence de pression de part et d'autre de la carène en chaque point d'abscisse ξ , et d'en déduire les forces appliquées.

La différence de pression est :

$$\Delta p = -\frac{1}{2} \rho \cdot \frac{4V}{L} \cos \delta f(\xi) = -\frac{1}{2} \rho V^2 \cos \delta \pi \varepsilon \frac{L}{R} \varphi(\xi),$$

d'où une force résultante, normale à la carène :

$$Y = -\frac{1}{2} \rho S V^2 \cos \delta \pi \varepsilon \frac{L}{2R} \int_{-1}^{+1} \varphi d\xi$$

et un couple :

$$N = -\frac{1}{2} \rho S V^2 \cos \delta \pi \varepsilon \frac{L}{2} \frac{L}{2R} \int_{-1}^{+1} \xi \varphi d\xi.$$

Or, d'après (2) :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi d\xi = 1 - \xi_J,$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi \varphi d\xi = 1 - \xi_J,$$

d'où :

$$(3) \quad \begin{cases} Y = \frac{1}{2} \rho S V^2 \cos \delta \pi \varepsilon \frac{L}{2R} (\xi_J - 1); \\ N = \frac{1}{2} \rho S V^2 \cos \delta \pi \varepsilon \frac{L}{2R} \frac{L}{2} (\xi_J - 1). \end{cases}$$

Si $\frac{L}{2} \xi_0$ est l'abscisse du point d'application :

$$(4) \quad \xi_0 = \frac{\xi_J - 1}{\xi_J + 1}.$$

Notons la simplicité de ce dernier résultat puisque la position du point d'application de la force hydrodynamique ne dépend que de la position du *point giratoire* (pour de grands rayons de giration).

Ainsi, lorsque le navire tourne sans dérive ($\xi_J = 0$) le point d'application est sur l'arrière du navire.

Lorsque le point giratoire est sur l'avant du navire, ce qui est, nous l'avons dit, le cas pratique, le point d'application est sur le navire en arrière du centre de gravité. Nous remarquons ici une différence essentielle entre un navire, c'est-à-dire une aile d'envergure très petite, et une aile d'avion. Pour une aile d'avion, en effet, le point d'application de la force aérodynamique est situé toujours en avant du centre de gravité. Il est facile de voir, en outre, que pour un navire en giration libre, le point d'application est nécessairement sur l'arrière du centre de gravité, car le couple de la force hydrodynamique doit être opposé au couple produit par le gouvernail.

2,3

CAS D'UN RAYON DE GIRATION QUELCONQUE

Lorsque le rayon de giration n'est plus très grand les tourbillons libres s'écartent sensiblement du plan de symétrie du navire. La vitesse normale qu'induit un tourbillon libre décroît alors lorsqu'on s'éloigne sur l'arrière. Nous avons vu, à propos de la traction en dérive, que l'on pouvait considérer cette décroissance comme linéaire et prendre :

$$\begin{aligned} A(\xi', \xi) &= 0 && \text{pour} && \xi' < \xi; \\ , \quad A(\xi', \xi) &= 1 - \lambda(\xi') \cdot (\xi' - \xi) && \text{pour} && \xi < \xi'. \end{aligned}$$

Le coefficient $\lambda(\xi')$ étant fonction de l'angle que fait le tourbillon avec le plan de symétrie. Cet angle est lui-même fonction de l'angle θ que fait la vitesse d'entraînement au point ξ' avec le plan de symétrie.

On a :

$$\frac{2R}{L} \sin \theta(\xi') = \frac{2R}{L} \sin \delta - \xi'$$

ou :

$$\sin \theta(\xi') = (\xi_J - \xi') \frac{L}{2R}.$$

Par conséquent, $\lambda(\xi')$ est, en fait, une fonction de la quantité :

$$u = (\xi - \xi') \frac{L}{2R}.$$

Notons que si :

$$u = 0, \quad \lambda = 0 \quad \text{si} \quad u \neq 0, \quad \lambda > 0 \quad \text{et} \quad \lambda(+u) = \lambda(-u).$$

Dans ces conditions l'intensité $f(\xi')$ des tourbillons sera déterminée, comme au paragraphe 2,2 par l'équation intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} A(\xi', \xi) \varphi(\xi') d\xi' = \xi - \xi_J \quad \text{avec} \quad f(\xi) = \pi \varepsilon V \frac{L}{2} \frac{L}{2R} \varphi(\xi),$$

ce qui donne :

$$\int_{-1}^{+1} [1 - \lambda(\xi') \cdot (\xi' - \xi_J)] \varphi(\xi') d\xi' = \xi - \xi_J.$$

La solution comporte le même tourbillon concentré à l'avant que dans la solution précédente, soit $(1 - \xi_J) \delta(1 - \xi)$, $\delta(x)$ étant la fonction de DIRAC.

En posant alors :

$$\varphi(\xi') = (1 - \xi_J) \delta(1 - \xi') + \psi(\xi'),$$

la fonction continue $\psi(\xi')$ sera solution de :

$$\int_{-1}^{+1} [1 - \lambda(\xi') \cdot (\xi' - \xi_J)] \psi(\xi') d\xi' = (\xi - 1) [1 - \lambda(1) \cdot (1 - \xi_J)].$$

En dérivant cette équation par rapport à ξ , il vient :

$$-\psi(\xi) + \int_{\xi}^1 \lambda(\xi') \psi(\xi') d\xi' = 1 - \lambda(1)(1 - \xi_J)$$

donc :

$$\psi(1) = -1 + \lambda(1) \cdot (1 - \xi_J)$$

et en dérivant une seconde fois :

$$\psi'(\xi) + \lambda(\xi) \cdot \psi(\xi) = 0$$

donc :

$$\psi(\xi) = [1 - \lambda(1) \cdot (1 - \xi_J)] \cdot e^{\Lambda(\xi)}$$

avec :

$$(5) \quad \Lambda(\xi) = \int_{\xi}^1 \lambda(\xi) d\xi.$$

(La solution du paragraphe précédent : $\psi = -1$ s'obtient pour $\lambda \equiv 0$.)

En définitive la répartition des tourbillons est donnée par :

$$(6) \quad \varphi(\xi) = (1 - \xi_J) \delta(1 - \xi) - [1 - \lambda(1) \cdot (1 - \xi_J)] e^{\Lambda(\xi)}.$$

Calculons maintenant les intégrales $\int \varphi d\xi$ et $\int \xi \varphi d\xi$.

Il s'agit d'abord d'évaluer $\Lambda(\xi)$: λ étant toujours positif et nul pour $\xi = \xi_J$, Λ est une fonction décroissante, nulle d'ailleurs pour $\xi = 1$. Λ est d'ailleurs toujours petit avec $\frac{L}{2R}$ et, pour une valeur donnée de ξ , minimal lorsque $\xi_J = 1$. Comme il serait illusoire, vu les hypothèses déjà consenties, de chercher une forme exacte de Λ , nous poserons Λ linéaire et possédant les caractères indiqués :

$$\Lambda = (\alpha + \beta |1 - \xi_J|) \frac{L}{2R} \cdot (1 - \xi),$$

α et β étant deux coefficients numériques petits devant l'unité, et :

$$\lambda(1) = \beta |1 - \xi_J| \frac{L}{2R}.$$

En négligeant alors les termes en α^2 , β^2 et $\alpha\beta$ il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi &= 1 - \xi_J - 2 \frac{L}{2R} [\alpha + \beta \xi_J |1 - \xi_J|]; \\ \int_{-1}^{+1} \xi \varphi(\xi) d\xi &= 1 - \xi_J + \frac{2}{3} \frac{L}{2R} [\alpha + \beta |1 - \xi_J|]. \end{aligned}$$

Nous voyons que ce calcul introduit des termes correctifs, linéaires en $\frac{L}{2R}$ et fonctions plus compliquées de $\xi_J = \frac{2R}{L} \sin \delta$. En fait, les formes écrites ci-dessus sont des formes simplifiées qui n'ont en commun avec la formes exactes, trop difficiles à calculer, que l'ordre de grandeur et l'allure de la variation. Mais il est facile de voir que dans la pratique elles nous suffisent, en effet, en posant :

$$\int \varphi d\xi = -1 - \xi_J - \frac{L}{2R} G_1(\xi_J);$$

$$\int \xi \varphi d\xi = 1 - \xi_J + \frac{1}{3} \frac{L}{2R} G_2(\xi_J),$$

les courbes G_1 et G_2 obtenues sont sur la *figure 18*. Les courbes G_1 et G_2 exactes ont,

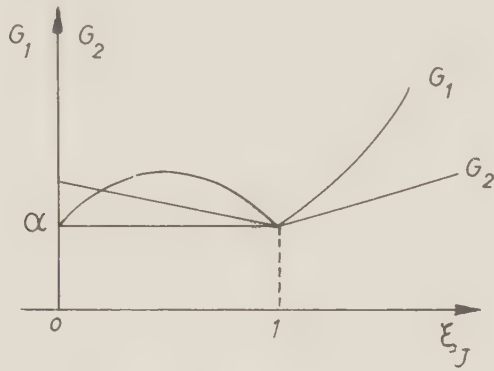


Fig. 18

par suite, des allures données sur la *figure 19* qui montrent que G_1 et G_2 restent pratiquement constantes et égales lorsque ξ_J reste au voisinage de 1 ce qui est le cas pratique.

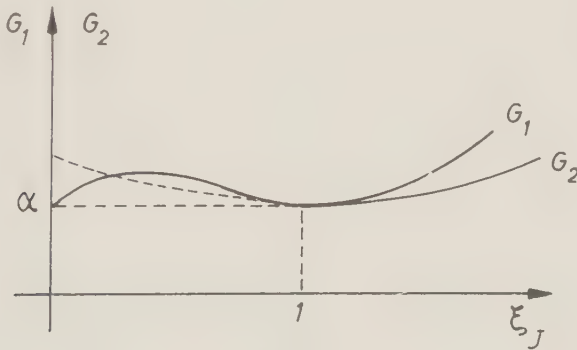


Fig. 19

Nous en déduisons pour Y et N les nouvelles valeurs :

$$(7) \quad \begin{cases} Y = \frac{1}{2} \rho S V^2 \pi \varepsilon \cos \delta \frac{L}{2R} \left[1 + \xi_J + \frac{L}{2R} G_1(\xi_J) \right]; \\ N = \frac{1}{2} \rho S V^2 \pi \varepsilon \frac{L}{2} \cos \delta \frac{L}{2R} \left[\xi_J - 1 - \frac{1}{3} \frac{L}{2R} G_2(\xi_J) \right], \end{cases}$$

formules dans lesquelles nous pourrions en pratique remplacer G_1 et G_2 par un même coefficient numérique α .

Ce calcul nous a, au fond, permis d'obtenir un terme de plus dans l'expression des développements de Y et de N en fonction des puissances de $\frac{L}{2R}$ qui reste toujours petit. Elles ne diffèrent, en effet, des formules (3) que par un terme correctif en $\left(\frac{L}{2R}\right)^2$. Nous voyons que dans les formules (3) Y était donné par défaut, et N par excès. Enfin, si nous ne pouvons chiffrer exactement le coefficient du terme correctif, du moins avons-nous vu qu'il était sensiblement trois fois plus grand pour Y que pour N .

Il va sans dire que l'expression exacte de Y et N pourrait être obtenue en résolvant exactement l'équation intégrale qui donne l'intensité tourbillonnaire. C'est le désir d'obtenir une solution approchée et utilisable qui nous a fait consentir aux différentes hypothèses simplificatrices du calcul.

2,4

INFLUENCE DE LA FORME DU NAVIRE

Nous avons jusqu'ici assimilé un navire avec son plan de symétrie, c'est-à-dire admis d'une part que la largeur est faible devant la longueur, ce qui est légitime. et d'autre part que la normale à la surface du navire peut être confondue avec la normale au plan de symétrie.

Cette deuxième circonstance n'est guère réalisée que dans la partie centrale du navire où la carène est sensiblement parallèle au plan de symétrie, mais cesse de l'être à l'avant et à l'arrière où l'inclinaison de la carène sur ce plan peut être importante. Nous allons calculer l'influence de la forme du navire, ce qui nous permettra plus précisément d'estimer l'influence de la forme de l'avant ou de l'arrière sur l'expression de la force hydrodynamique.

Soit M un point du plan longitudinal de symétrie, M' et M'' les points de la carène qui se projettent en M , My étant la normale au plan de symétrie, la normale n' en M' fait l'angle α avec My (fig. 20).

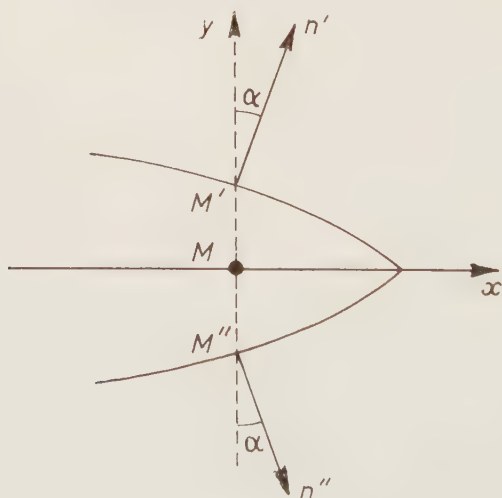


Fig. 20

n'' , normale en M'' , est symétrique de n' par rapport à Ox .

La vitesse d'entraînement du point M est :

$$V_x = V \cos \delta, \quad V_y = V \frac{L}{2R} (\xi - \xi_J).$$

Nous admettons que la distance de M' à M'' est petite devant L et que leurs vitesses d'entraînement sont égales à celle de M .

Pour que l'écoulement autour du navire soit, comme il convient, tangent à la carène, nous le supposons produit par les tourbillons libres et liés de notre schéma précédent, ainsi que par des sources $\sigma(x)$ disposées suivant l'axe Ox .

— les tourbillons induisent une vitesse dont la composante tangentielle est discontinue : notons cette vitesse :

$$V_x^1, \quad V_y^1 \quad \text{sur} \quad y = +0 \quad \quad \quad -V_x^1, \quad -V_y^1 \quad \text{sur} \quad y = -0;$$

— les sources, une vitesse dont la composante normale est discontinue :

$$V_x^2, \quad V_y^2 \quad \text{sur} \quad y = +0 \quad \quad \quad V_x^2, \quad -V_y^2 \quad \text{sur} \quad y = -0.$$

Ces différentes vitesses doivent être telles que leurs composantes normales résultantes (sur n' et sur n'') soient précisément celles de la vitesse d'entraînement. Cela nous donne les conditions suivantes :

$$(8) \quad V_y^1 + V_x^1 \operatorname{tg} \alpha = V_y$$

$$(9) \quad V_y^2 + V_x^2 \operatorname{tg} \alpha = V_x \operatorname{tg} \alpha.$$

L'équation (9), compte tenu de $V_x = V \cos \delta$, montre que V_y^2 et V_x^2 vitesses provenant des sources, seront de la forme :

$$V_x^2 = V \cos \delta v_x^2;$$

$$V_y^2 = V \cos \delta v_y^2.$$

Les fonctions v_x^2 et v_y^2 n'étant fonction que de la forme du navire et non des paramètres R et δ .

L'équation (8) détermine les tourbillons, mais compte tenu de $V_y = V \frac{L}{2R} (\xi - \xi_J)$, leur répartition sera fonction des paramètres R et δ et de la forme du navire.

$f(\xi)$ étant l'intensité du tourbillon à l'abscisse ξ , V_y et V_x ont déjà été calculés :

$$V_y = \frac{2}{\pi \varepsilon} L \int_{-1}^{\varepsilon+1} A(\xi', \xi) f(\xi') d\xi', \quad V_x = \frac{f(\xi)}{L},$$

en posant comme précédemment : $f(\xi) = \pi \varepsilon V \frac{L}{2} \frac{L}{2R} \varphi(\xi)$ l'équation (8) s'écrit :

$$(10) \quad \int_{-1}^{\varepsilon+1} A(\xi', \xi) \varphi(\xi') d\xi' + \frac{\pi \varepsilon}{2} \operatorname{tg} \alpha \varphi(\xi) = \xi - \xi_J.$$

En faisant $\alpha \equiv 0$ nous retrouvons l'équation intégrale étudiée jusqu'ici.

La forme du navire étant donnée, donc α étant une fonction donnée de ξ , la répartition des tourbillons s'obtient donc par la résolution d'une équation de FREDHOLM.

Notons que pour R très grand comme pour R quelconque, la forme simplifiée que nous avons adoptée pour A permet, par dérivation, de se ramener à une équation différentielle.

2,42 Influence de la forme de l'avant.

Supposons d'abord R très grand. L'équation (10) prend la forme :

$$\int_0^1 \varphi(\xi') d\xi' + \frac{\pi \varepsilon}{2} \operatorname{tg} \alpha(\xi) \cdot \varphi(\xi) = \xi - \xi_J.$$

Si $\alpha(\xi)$ est contenu et si $\alpha(1) \neq 0$ nous avons maintenant une solution continue. Il n'y a plus de tourbillon concentré sur l'avant.

Pour $\xi = 1$, $\varphi(1) = \frac{1 - \xi_J}{\frac{\pi \varepsilon}{2} \operatorname{tg} \alpha(1)}$, et φ est solution de l'équation différentielle :

$$-\varphi(\xi) + \frac{\pi \varepsilon}{2} \frac{d}{d\xi} [\operatorname{tg} \alpha(\xi) \cdot \varphi(\xi)] = 1.$$

Pour étudier l'influence de l'avant, supposons $\alpha(\xi)$ constant et posons :

$$\frac{\pi \varepsilon}{2} \operatorname{tg} \alpha(\xi) = m,$$

il vient :

$$-\varphi + m \varphi' = 1.$$

ou :

$$\varphi(\xi) = \left(1 + \frac{1}{m} \xi_J\right) e^{-\frac{1}{m} \xi} - 1.$$

Nous voyons que si nous faisons tendre m vers zéro, $\varphi(\xi)$ tend bien vers $(1 - \xi_J) \delta(1 - \xi)$. C'est au fond la définition que nous aurions pu donner de la fonction de DIRAC.

La forme angulaire de l'avant a pour effet par conséquent de transformer le tourbillon concentré, donc infini, sur l'avant en un tourbillon réparti dont la densité décroît d'autant plus rapidement que l'angle α est petit. On peut admettre que ce tourbillon concentré s'est épanoui sur une longueur a telle que $e^{-\frac{a}{m}}$ soit négligeable devant 1.

Pour avoir un ordre de grandeur, prenons $\alpha = 30^\circ$:

$$m = \frac{\pi \varepsilon}{2} \operatorname{tg} 30^\circ \sim 0,09.$$

On aura :

$$e^{-\frac{a}{m}} = \frac{1}{20} \quad \text{pour} \quad a = 0,27.$$

Le résultat aurait donc été sensiblement le même si, au lieu de supposer α constant partout, nous l'avions supposé constant sur l'avant sur une longueur égale à 0,3, et nul ensuite (fig. 21).

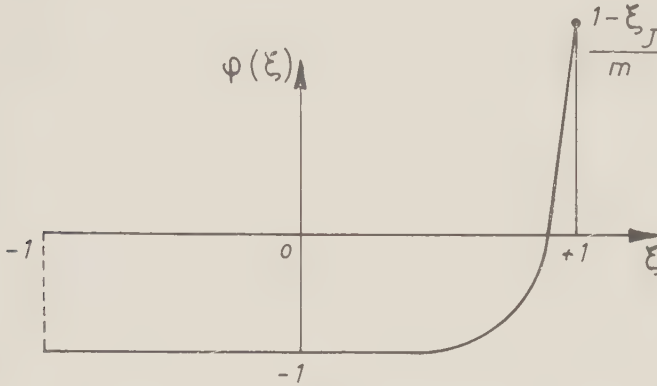


Fig. 21

m étant petit, nous obtenons, en négligeant les termes d'ordre supérieur à m :

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^{+1} \varphi \, d\xi &= 1 + \xi \quad m, \\ - \int_{-1}^{+1} \xi \varphi \, d\xi &= \xi_J - 1 \, m \, \xi. \end{aligned}$$

On voit alors que Y et N qui sont proportionnels à ces valeurs, décroissent lorsque m croît, c'est-à-dire lorsque le navire est moins aigu à l'avant.

Lorsque R est quelconque, il est inutile de faire de nouveaux calculs.

La solution trouvée au paragraphe 3 comporte, en effet, le même tourbillon concentré à l'avant. L'effet de la forme de l'avant sera encore d'étaler ce tourbillon sur une certaine longueur, ce qui aura la même répercussion sur les expressions Y et de N .

On voit en outre, que la forme de l'avant se traduira pour Y dans une diminution du coefficient du terme en $\frac{L}{2R}$, diminution d'autant plus importante que l'angle α de l'étrave sera plus grand. Pour N , au contraire, c'est le terme indépendant de R qui sera modifié dans le même sens.

2,43 Influence de la forme de l'arrière.

Supposons de la même manière que sur une longueur a à partir de l'arrière la carène ait une pente α négative, que nous supposerons constante (fig. 22).

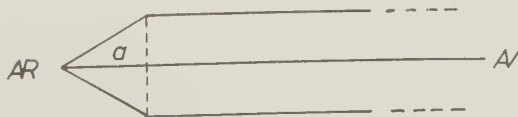


Fig. 22

Voyons quelle sera la répartition des tourbillons, posons encore :

$$m = \frac{\pi \varepsilon}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

et supposons :

$$\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad \xi = -1 + a.$$

Nous aurons alors :

$$\int_{-1+a}^{-1} \varphi(\xi') d\xi' = -1 + a - \xi_J$$

quelle que soit la forme de l'avant. Il restera à résoudre :

$$\int_{-1}^{-1+a} \varphi(\xi') d\xi' - m \varphi(\xi) = \xi + 1 - a,$$

d'où :

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{1+a-\xi}{m}} - 1 \quad \text{pour} \quad -1 < \xi < -1 + a.$$

Nous voyons que φ au lieu d'être constamment négatif et égal à -1 devient positif sur la partie arrière. Dans notre exemple où l'arrière fait un angle brusque, φ passe de -1 à 0 . Si l'angle α est continu, φ reste continu, mais croît de toutes façons sur l'arrière, dont l'influence est, par conséquent, considérable (fig. 23).

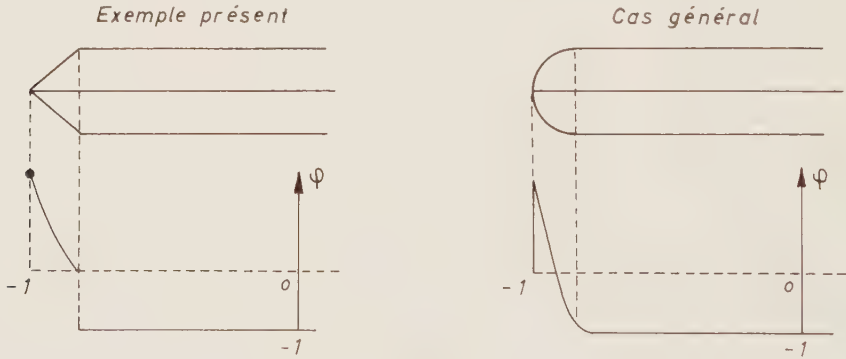


Fig. 23

La différence avec les formules antérieures provient du terme $e^{-\frac{1+a-\xi}{m}}$:

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^{-1+a} e^{-\frac{1+a-\xi}{m}} &= - \frac{1}{m} \left(e^{\frac{a}{m}} - 1 \right); \\ \int_{-1}^{-1+a} \xi e^{-\frac{1+a-\xi}{m}} &= + (m^2 + m) (e^{\frac{a}{m}} - 1) + a m. \end{aligned}$$

La première quantité étant toujours négative, Y sera plus petit.

La seconde étant toujours positive, N sera plus grand.

Remarquons, en outre, que l'influence de l'arrière portera dans les expressions de Y et de N sur les termes en $\frac{L}{2R}$, et sera d'autant plus importante que le rapport $\frac{a}{m}$ sera grand : navire effilé sur une longueur importante.

Disons enfin que pour calculer exactement l'influence de la forme du navire sur les expressions de Y et N il faut tenir compte des sources. Mais, d'après ce que nous avons vu à leur propos au début de ce paragraphe, cela ne peut modifier que la valeur numérique des coefficients et non la forme des expressions de Y et N.

2,5

FORMULES FINALES POUR Y ET N

Nous résumerons cette étude par les formules suivantes :

$$Y = \frac{1}{2} \rho S V^2 \pi \varepsilon \cos \delta \left[A \sin \delta + B \frac{L}{2R} + \left(\frac{L}{2R} \right)^2 C_1 \left(\frac{2R}{L} \sin \delta \right) \right],$$

$$N = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho S V^2 \pi \varepsilon \cos \delta \left[A_1 \sin \delta - B_1 \frac{L}{2R} - \left(\frac{L}{2R} \right)^2 C_1 \left(\frac{2R}{L} \sin \delta \right) \right],$$

A, B, A₁, B₁ sont quatre coefficients numériques positifs. Leur valeur est de l'ordre de grandeur de l'unité (de 0,5 à 1,5) puisque, pour un plan mince, ils sont tous quatre égaux à 1.

C et C₁ sont deux fonctions de la quantité $\xi_j = \frac{2R \sin \delta}{L}$ qui reste voisine de 1 au cours des girations libres ; C et C₁ sont positifs et C₁ inférieur à C.

La forme de l'avant influe sur B et A₁ : plus l'avant est aigu, plus B et A₁ sont grands.

La forme de l'arrière influe sur B et B₁ : plus le navire est effilé à l'arrière, plus B et B₁, sont grands.

Ces remarques nous permettront sinon de donner une valeur précise aux qualités évolutives d'un navire particulier, du moins de comparer les qualités évolutives de navires différents.

2,6

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Alors que pour la traction en dérive nous avons des résultats d'expériences faites sur quatre navires différents, nous n'avons pour la giration que très peu de résultats expérimentaux susceptibles de nous être utiles, les expériences correspondantes n'ayant pas été faites en vue de vérifier notre présente théorie. Ces expériences répondent, en effet, directement au problème « Pour une vitesse et un angle de barre donnés quel est le rayon de giration et la dérive ? » sans passer par l'intermédiaire des forces appliquées. Nous utiliserons cependant une série d'expériences faites pour l'étude du gouvernail d'un navire : celui-ci étant placé à la distance R du centre de giration et avec une dérive δ on a mesuré les forces hydrodynamiques en fonction de l'angle de barre, pour deux rayons de giration différents et chaque fois pour trois dérives dont la dérive nulle. A chacune de ces expériences nous retenons une seule valeur : celle qui est obtenue quand la barre est à zéro. Pour les autres valeurs interviennent, en effet, la force appliquée au gouvernail et l'interaction entre carène et gouvernail. Nous avons extrait ainsi six valeurs pour Y et six valeurs pour N, ce qui est évidemment bien peu, surtout si nous considérons que, tirées d'expériences différentes, elles ne peuvent avoir une grande précision relative.

Le navire étudié a les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} L &= 190 \text{ m}, & T &= 10,4 \text{ m}, \\ \text{ce qui nous donne :} & & \varepsilon &= 0,106 \quad \text{et} \quad S = 1\,960 \text{ m}^2 \quad \text{environ.} \end{aligned}$$

Les mesures sont les suivantes, la vitesse étant constante et égale à 8 nœuds :

R	δ	Y	N	$x_0 = \frac{N}{Y}$	$\xi_0 = \frac{2x}{L}$
m	degrés	t	t/m		
496	0	65	— 5 400	— 83	— 0,87
496	8,6	175	— 4 300	— 24,6	— 0,26
496	12,9	260	— 3 700	— 14,2	— 0,147
839	0	38	— 3 250	— 85,5	— 0,9
839	6	90	— 700	— 7,8	— 0,08
839	12	200	+ 1 500	+ 7,5	+ 0,08

Notons d'abord que les sens de variations sont en accord avec nos formules aussi bien pour Y que pour N et pour ξ .

Nous vérifions ensuite que pour $\delta = 0$, Y et N sont inversement proportionnels à $\frac{L}{2R}$, ce qui se produit si l'on néglige les termes en $\left(\frac{L}{2R}\right)^2$, en effet :

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 496 \times 65 = 32\,200 \\ 839 \times 38 = 31\,900 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 496 \times 5\,400 = 2\,680\,000 \\ 839 \times 3\,250 = 2\,720\,000 \end{array} \right\} \end{array}$$

(La vérification se fait même au 1/100^e près ce qui est illusoire car supérieur à la précision des mesures.)

Cela nous permet de mesurer B et B₁ puisque pour $\delta = 0$:

$$Y = \frac{1}{2} \rho S V^2 \pi \varepsilon \frac{L}{2R} \cdot B.$$

on obtient :

$$B = 0,6 \cdot B_1 = 0,55.$$

Le calcul précis de A et A₁ à partir de ces données expérimentales est pratiquement impossible car les termes $\left(\frac{L}{2R}\right)^2 C(\xi_j)$ sont comparables aux termes A sin δ puisque δ est petit.

On obtient :

$$\begin{aligned} A + \frac{1}{\sin \delta} \left(\frac{L}{2R}\right)^2 C(\xi) &= 1,35 \quad \text{pour} \quad R = 496 \quad \text{et} \quad 0,85 \quad \text{pour} \quad R = 839, \\ A_1 + \frac{1}{\sin \delta} \left(\frac{L}{2R}\right)^2 C_1(\xi) &= 1,25 \quad \text{pour} \quad R = 496 \quad \text{et} \quad 0,75 \quad \text{pour} \quad R = 839. \end{aligned}$$

Ce qui nous montre en tous cas que le sens de variation de ces quantités est bien le sens prévu ainsi que leur ordre de grandeur.

Notons enfin que des expériences faites dans ce but permettraient facilement de calculer pour un navire déterminé les six coefficients qui entrent dans les expressions de Y et N .

Pour l'étude de la giration libre qui va faire l'objet du chapitre suivant, il nous suffit d'avoir les expressions de Y et N ainsi que l'ordre de grandeur de ces coefficients.

MOUVEMENTS NATURELS DES NAVIRES

3,1 EXAMEN DES DIVERSES FORCES EXERCÉES SUR LE NAVIRE

Nous abordons maintenant l'étude proprement dite des qualités évolutives d'un navire, c'est-à-dire des mouvements d'un navire libre, soumis à la seule action de ses hélices et de son gouvernail. Nous ne sommes malheureusement pas en état de résoudre ce problème dans toute sa généralité, nous devons supposer que le navire navigue en eau calme, qu'il n'a ni roulis, ni tangage, et que les vagues qu'il produit ont une action négligeable sur son mouvement. C'est en effet l'hypothèse que nous avons faite dans les chapitres précédents et c'est la seule que nous ferons ici, bien que nous ayons encore beaucoup d'éléments inconnus.

En dehors de la force hydrodynamique étudiée plus haut en supposant le fluide parfait, le navire est encore soumis à une *force de frottement*. Par raison de symétrie nous pouvons admettre que le frottement est le même de chaque côté et que cela reste vrai au cours d'une giration, que la force de frottement est par suite longitudinale et son moment, par rapport au centre de gravité, nul. Cette force est une fonction de la vitesse qui peut d'ailleurs être évaluée grâce aux formules déduites de l'étude de la couche limite laminaire ou turbulente, mais nous verrons qu'elle s'élimine de nos calculs; nous n'avons donc pas besoin de l'explicitier.

La *poussée des hélices*, d'autre part, est aussi une force longitudinale que nous appelons T . Pour une puissance donnée par le moteur T est une fonction pratiquement inconnue des différents paramètres du mouvement ainsi que de l'angle de barre, le gouvernail étant voisin des hélices. Aussi étudierons nous *les mouvements à vitesse constante* du navire : La poussée des hélices sera supposée réglée à chaque instant pour vaincre la force de frottement et conserver au centre de gravité une vitesse constante.

L'*action du gouvernail* est plus délicate à étudier. Nos deux premiers chapitres nous permettraient d'étudier facilement un *gouvernail isolé*. Un gouvernail est en effet assimilable à une aile dont l'envergure relative est de l'ordre de l'unité, donc beaucoup plus petite que celle d'une aile d'avion, plus grande que celle que nous avons étudiée. Il suffit d'une légère modification du schéma tourbillonnaire, consistant à ajouter des tourbillons libres supplémentaires s'échappant de l'arête arrière du gouvernail pour obtenir les forces hydrodynamiques exercées.

Mais l'interaction entre la carène et le gouvernail reste encore bien difficile à

évaluer avec rigueur. Aussi adopterons-nous le point de vue simple suivant : Lorsque la barre est à zéro les forces hydrodynamiques s'exerçant sur l'ensemble carène et gouvernail sont celles qui ont été calculées plus haut. Si la barre n'est pas à zéro, les forces hydrodynamiques diffèrent des précédentes par l'adjonction d'une force $\vec{\Phi}$ appliquée sur le gouvernail, c'est-à-dire pratiquement à la distance $\frac{L}{2}$ du centre de gravité. Seule la composante de cette force normale au plan de symétrie nous intéresse. Son moment par rapport au centre de gravité est $\frac{L}{2} \Phi$. Nous introduirons donc un seul paramètre Φ , et le problème que nous étudierons sera de trouver, Φ étant donné, le rayon de giration et la dérive correspondante.

Il restera évidemment à savoir quel angle de barre est nécessaire pour produire la force Φ . Mais cela constituera l'étude spéciale du gouvernail.

Enfin, nous devons remarquer que les forces que nous avons calculées ne sont valables que pour un mouvement permanent. Lorsque le mouvement n'est pas permanent, aux forces précédentes s'ajoutent des forces d'inertie et des forces dues au retard dans l'établissement de la circulation, que nous allons maintenant préciser.

3,2

FORCES D'INERTIE

Considérons d'abord un mouvement permanent défini par V , R et δ . En dehors des surfaces tourbillonnaires, la vitesse absolue du fluide, rapportée à des axes fixes $OXYZ$, dérivant d'un potentiel $\Phi(X, Y, Z, t)$. Si $Oxyz$ sont les axes liés au navire, le changement de coordonnées transforme Φ en une fonction indépendante de t puisque le mouvement est permanent par rapport à $Oxyz$. Donc :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Or, $\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \frac{\partial \Phi}{\partial Y}, \frac{\partial \Phi}{\partial Z}$ sont les composantes de la vitesse absolue $\vec{V}_A; \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$ sont celles de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ et, par suite :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \vec{V}_A \cdot \vec{V}_e.$$

Il s'ensuit que la pression est :

$$p = - \frac{\rho}{2} V_A^2 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

ou :

$$p = \frac{\rho}{2} (V_r^2 - V_e^2),$$

qui généralise la relation de BERNOULLI pour un mouvement relatif permanent quel que

soit le mouvement d'entraînement. Nous avons utilisé cette formule pour calculer Y et N.

Supposons maintenant le mouvement non permanent. Nous pouvons écrire le potentiel des vitesses $\Phi_0 + \Phi_1$, Φ_0 étant le potentiel précédent correspondant aux valeurs de R et δ à l'instant considéré, Φ_1 étant un potentiel supplémentaire. Nous devons ajouter à la valeur précédente de la pression, la pression supplémentaire $p_1 = -\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ qui donne naissance à la force d'inertie supplémentaire cherchée.

Or, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ est une fonction harmonique dont la dérivée normale en un point du plan de symétrie doit être égale à la dérivée, par rapport au temps et relativement aux axes mobiles de la vitesse absolue de ce point. La vitesse absolue du point d'abscisse ξ est :

$$V_y = V \xi \frac{L}{2R} - V \sin \delta.$$

Sa dérivée est alors :

$$V \xi \left(\frac{L}{2R} \right)' - V \cos \delta \cdot \delta'$$

(nous supposons en effet que seuls R et δ sont variables, V est constant) φ_2 et φ_3 étant deux fonctions ne dépendant que de la forme du navire et non du mouvement, nous aurons :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = V \left(\frac{L}{2R} \right)' \varphi_2(x, y, z) - V \cos \delta \cdot \delta' \varphi_3(x, y, z).$$

La différence de pression Δp_1 de part et d'autre du plan de symétrie est alors :

$$\Delta p_1 = -\rho V \left[a(\xi) \cdot \xi \left(\frac{L}{2R} \right)' - b(\xi) \cos \delta \cdot \delta' \right],$$

a et b étant deux coefficients ayant la dimension d'une longueur.

En posant :

$$M_0 = \rho \iint b(\xi) d\sigma, \quad I_0 = \left(\frac{L}{2} \right)^2 \rho \iint a(\xi) d\sigma$$

et en notant que si par raison de symétrie :

$$a(-\xi) = a(\xi) \quad \text{et} \quad b(-\xi) = b(\xi)$$

$$\iint \xi a(\xi) d\sigma - \iint \xi b(\xi) d\sigma = 0.$$

(les intégrales sont étendues à la surface du plan de symétrie), il vient alors :

$$(1) \quad \begin{cases} Y_1 = M_0 V \cos \delta \cdot \delta'; \\ N_1 = -I_0 V \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right). \end{cases}$$

Les coefficients M_0 et I_0 ont les dimensions d'une masse et d'un moment d'inertie.

On sait qu'on les appelle « masse et moment d'inertie de l'eau entraînée ». Nous voyons ici de quelle manière ils s'introduisent et nous verrons plus loin qu'il serait faux de les introduire en remplaçant trop simplement la masse M et le moment d'inertie I du navire par $M + M_0$ et $I + I_0$, comme on est souvent tenté de le faire.

M_0 et I_0 ont été calculés par différents auteurs pour des corps de formes très variés (par exemple, Dr Kurt WENDEL [6]).

Pour un navire, M_0 est de l'ordre de M , I_0 de l'ordre de I .

3,3 FORCES DUES AU RETARD DANS L'ÉTABLISSEMENT DE LA CIRCULATION

Au cours d'un mouvement permanent établi depuis longtemps, les forces qui s'exercent ne dépendent que de l'état des vitesses qui sont constantes. Pour un régime variable, ces forces dépendent non seulement des vitesses instantanées mais de tout le mouvement antérieur. Nous avons adopté pour un régime permanent, un schéma tourbillonnaire où les tourbillons se refermaient à l'infini. Or, au début d'un mouvement, ces tourbillons se referment à distance finie et ne s'étirent qu'ensuite du fait du déplacement. Soit, en effet, une ligne fluide située dans le plan médian et entourant largement le navire, initialement au repos. La circulation le long de cette ligne doit rester constante, donc nulle. Au début du mouvement, cette ligne reste pratiquement invariable et les tourbillons se referment donc à son intérieur.

D'ailleurs une expérience facile à réaliser consiste à plonger un profil dans l'eau, puis à l'y déplacer lentement en lui donnant une faible dérive (fig. 24). On voit immédia-

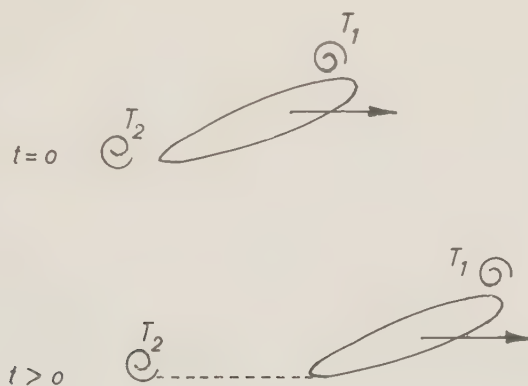


Fig. 24

tement se former deux tourbillons l'un sur l'avant T_1 , l'autre sur l'arrière T_2 . On constate que dans les instants qui suivent le tourbillon T_1 reste à l'avant du profil, alors que le tourbillon T_2 reste fixe à l'endroit où il a été produit, c'est-à-dire à la position initiale de la pointe arrière. En outre, si à un instant ultérieur t' on augmente la vitesse, on voit aussitôt apparaître à la pointe un nouveau tourbillon T'_2 qui reste lui aussi sur place s'il n'est pas trop près du tourbillon T_2 .

Plaçons-nous alors dans le cas où le navire évolue avec un grand rayon de giration et une faible dérive. Les deux nappes de tourbillons libres se réduisent à deux

filets tourbillonnaires βF et $\beta' F'$ (fig. 25 B) dont l'intensité I est la somme des intensités des tourbillons liés, soit $I = \int f d\xi$.

Si à l'instant t_0 le rayon de giration ou la dérive sont modifiés, I se trouve augmenté de $\delta I(t_0)$. Un filet tourbillonnaire tel que $F \propto \alpha' F'$ (fig. 25 A) va prendre naissance, αF ayant comme longueur à l'époque t : $V(t - t_0)$.

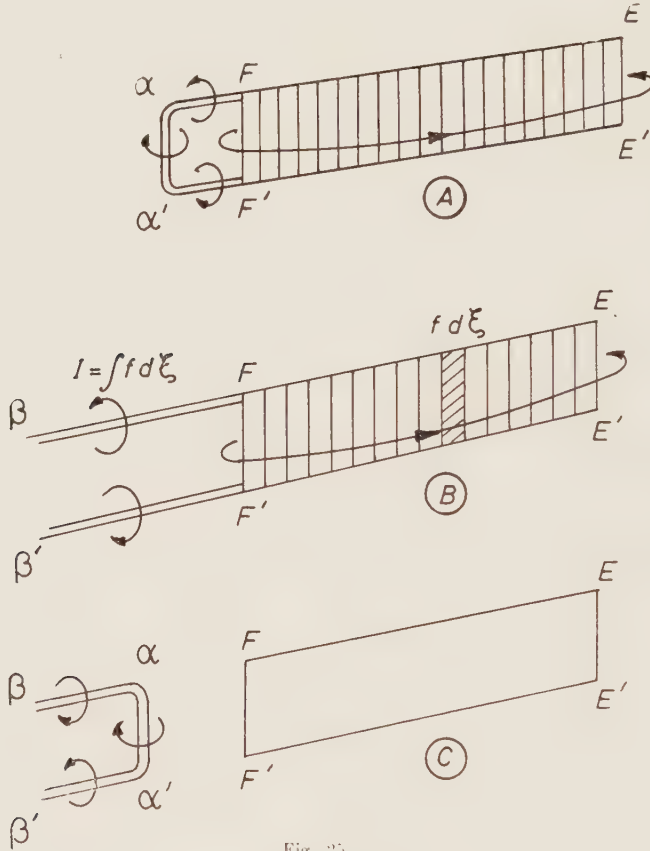


Fig. 25

Nous sommes amenés à ajouter au schéma (fig. 25 B) où les tourbillons libres ont l'intensité $I + \delta I(t_0)$, un tourbillon $\beta' \alpha' \beta$ (fig. 25 C) d'intensité $\delta I(t_0)$ qui se déplace vers l'arrière avec la vitesse V . Or, nous avons calculé la vitesse induite par un tel tourbillon (cf. chapitre premier). Cette vitesse est pratiquement nulle sur la carène sauf peut-être sur l'arrière, tant que αF n'est pas trop grand. Il s'ensuit que :

1° l'intensité f des tourbillons liés est pratiquement la même qu'en mouvement permanent pour les mêmes valeurs de R et δ et que :

2° le filet tourbillonnaire supplémentaire n'a pour effet que d'induire une force appliquée sur l'arrière du navire. Cette force $\delta Y_2(t)$ est proportionnelle à $\delta I(t_0)$ donc à $\delta Y(t_0)$, Y étant la force calculée en mouvement permanent, le facteur de proportionnalité étant une fonction rapidement décroissante de $V(t - t_0)$ soit :

$$\delta Y_2(t) = - \Gamma [V(t - t_0)] \delta Y(t_0).$$

Si le mouvement varie d'une manière continue, la force Y_2 aura pour valeur à l'époque t :

$$(2) \quad Y_2(t) = - \int_{-\infty}^{vt} \Gamma[V(t-t_0)] Y'(t_0) dt_0.$$

La fonction $\Gamma(u)$ n'est autre, à un facteur constant près, que le noyau de l'équation intégrale écrite aux chapitres précédents, mais pour des valeurs négatives du paramètre.

La force Y_2 étant appliquée pratiquement à l'arrière, son moment sera :

$$(3) \quad N_2 = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{vt} \Gamma[V(t-t_0)] Y'(t_0) dt_0,$$

Γ étant une fonction décroissante s'annulant très rapidement, la force $Y_2(t)$ dépendra seulement du mouvement qui précède de peu l'instant considéré. Y_2 ne sera important, relativement à Y , que si la vitesse V est faible (fig. 26).

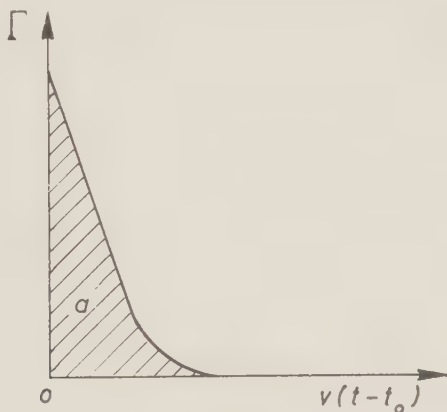


Fig. 26

Si au contraire V est grand cette force devient petite :

$$Y_2 = - \int_{-\infty}^{vt} \Gamma[V(t-t_0)] Y'(t_0) dt_0 \sim - \frac{Y'(t)}{V} \int_0^{\infty} \Gamma(u) du = - \frac{\alpha}{V} Y'(t),$$

α représentant la surface de la courbe Γ .

Nous verrons cependant que ce n'est pas la vitesse qui importe, mais seulement le rapport de la distance où l'influence d'un tourbillon est nulle à la longueur du navire.

3,4

ÉQUATION DU MOUVEMENT

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier un mouvement quelconque du navire.

Les forces appliquées sont donc T , Φ et Y (résultante de Y , Y_1 et Y_2) (fig. 27).

Les équations intrinsèques du mouvement du centre de gravité sont :

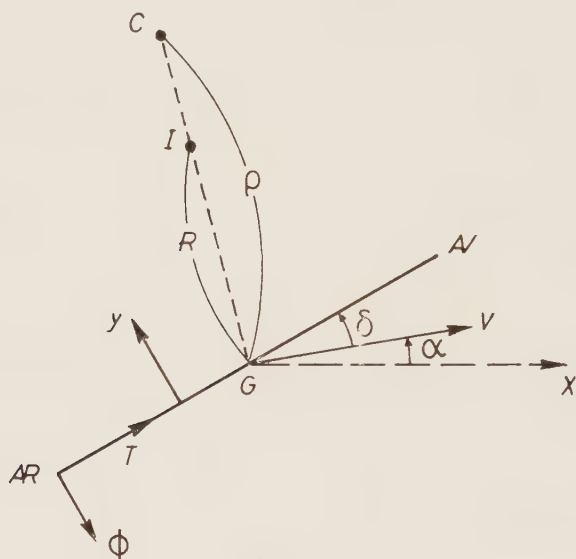


Fig. 27

$$\begin{cases} M \frac{dV}{dt} = T \cos \delta - (Y + Y_1 + Y_2 - \Phi) \sin \delta; \\ M \frac{V^2}{\rho} = T \sin \delta + (Y + Y_1 + Y_2 - \Phi) \cos \delta, \end{cases}$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire de G.

Comme nous supposons que la vitesse reste constante, la force T due aux hélices devra vérifier constamment l'égalité :

d'où :

$$T = (Y + Y_1 + Y_2 - \Phi) \operatorname{tg} \delta,$$

$$M \frac{V^2}{\rho} = (Y + Y_1 + Y_2 - \Phi) \frac{1}{\cos \delta}.$$

Or, soit C le centre de courbure de la trajectoire, I le centre instantané de rotation du navire, α l'angle de la vitesse $\vec{V}$ avec une direction fixe, on a :

$$CG = \rho, \quad IG = R$$

et :

$$V = R (\alpha' - \delta')$$

donc :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \frac{\delta'}{V}$$

d'où :

$$M \frac{V^2}{R} - M V \delta' = (Y + Y_1 + Y_2 - \Phi) \frac{1}{\cos \delta}$$

en remplaçant Y_1 par sa valeur (1), il vient :

$$(4) \quad \left| M \frac{V^2}{R} - (M + M_0) V \delta' = (Y + Y_2 - \Phi) \frac{\cos \delta}{1} \right|$$

Remarquons en passant que la masse d'eau entraînée n'intervient que dans le coefficient de δ' et non dans celui de $\frac{V^2}{R}$.

Pour écrire l'équation du mouvement autour du centre de gravité, remarquons que la rotation du navire par rapport à des axes fixes est définie par l'angle $\alpha + \delta$ dont la dérivée est $\alpha' + \delta' = \frac{V}{R}$.

I étant le moment d'inertie du navire par rapport à la verticale de G , nous avons :

$$I V \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) = N + N_1 + N_2 + \frac{L}{2} \Phi$$

et en remplaçant N_1 par sa valeur :

$$(5) \quad \left| (I + I_0) V \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) = N + N_2 + \frac{L}{2} \Phi \right|,$$

Φ étant donné, Y , Y_2 , N , N_2 étant connus en fonction de R et δ , les équations (4) et (5) déterminent R et δ en fonction du temps.

3,5

GIRATIONS PERMANENTES NATURELLES

Cherchons d'abord quelles sont les girations permanentes que peut prendre un navire sous l'effet d'une force Φ constante donnée.

R et δ étant constants, Y_2 et N_2 sont nuls ; les équations (4) et (5) s'écrivent :

$$(6) \quad M \frac{V^2}{R} = (Y - \Phi) \frac{1}{\cos \delta} ;$$

$$(7) \quad 0 = N + \frac{L}{2} \Phi,$$

Y et N sont donnés par les formules (11) du chapitre II où nous avons supposé $R > 0$. Il est clair que $Y (-R, -\delta) = -Y(R, \delta)$ et $N (-R, -\delta) = -N(R, \delta)$. Nous devons remplacer dans ces formules les termes en $\left(\frac{L}{2R} \right)^2$ par $\frac{L}{2R} \cdot \left| \frac{L}{2R} \right|$.

Nous poserons :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{1}{2} \rho S V^2 \pi \varepsilon \varphi ; \\ M = \frac{1}{2} \rho S \pi \varepsilon \frac{L}{2} k, \end{array} \right.$$

φ et k sont des nombres sans dimension. On voit d'ailleurs que si b est la largeur moyenne de la partie immergée, on a :

$$M = \rho S b \quad \text{et} \quad k = \frac{2b}{\pi T},$$

T étant le tirant d'eau, k est donc d'autant plus grand que le navire est plus large.

Nous avons calculé ce coefficient pour six navires de types très différents, k restait compris entre 1 et 1,5.

En posant $x = \frac{L}{2R}$, les équations (6) et (7) s'écrivent :

$$(9) \quad \begin{cases} kx - A \sin \delta + Bx + Cx|x| - \frac{\varphi}{\cos \delta} ; \\ 0 = A_1 \sin \delta - B_1x - C_1x|x| + \frac{\varphi}{\cos \delta} \end{cases}$$

et déterminent x et δ en fonction de φ .

Rappelons que tous les coefficients écrits sont positifs, A , B , A_1 et B_1 légèrement inférieurs à l'unité, C et C_1 très petits.

Dérive.

En éliminant φ entre les équations (9) on trouve :

$$(10) \quad \sin \delta = \frac{k + B_1 - B}{A + A_1} x - \frac{C - C_1}{A + A_1} x|x|.$$

Le coefficient de x est positif. Celui de $x|x|$ est très faible, mais son signe est quelconque, δ et x sont de même signe :

L'avant du navire est dirigé vers l'intérieur du cercle décrit par le centre de gravité. δ est d'autre part une fonction croissante de x le coefficient de x est d'ailleurs fonction croissante de la largeur k du navire. On voit donc que la *dérive est d'autant plus grande que le rayon de giration est faible et que le navire est plus large.*

Cette équation nous renseigne aussi sur la position du point giratoire dont, l'abscisse réduite ξ_0 est égale à $\frac{\sin \delta}{x}$:

$$\xi_0 = \frac{k + B_1 - B}{A + A_1} - \frac{C - C_1}{A + A_1} x.$$

Comme le coefficient de $|x|$ est très faible, la position du point giratoire varie peu. Si nous prenons pour fixer les idées $k = 1,5$ et les autres coefficients égaux à l'unité on a :

$$\xi_0 = 0,75.$$

Le point giratoire est donc sur le navire vers l'avant et pratiquement fixe.

Son sens de variation est difficile à prévoir et dépend du navire considéré.

C'est au point giratoire qu'il y a intérêt à placer la passerelle car la vitesse de ce point est dans l'axe du navire.

Rayon de giration.

Le rayon de giration est donné en fonction de φ en éliminant δ entre les équations (9). Si nous prenons pour plus de simplicité $\cos \delta = 1$ puisque δ est petit, on trouve :

$$(11) \quad (A + A_1) \varphi = S x + (A_1 C + A C_1) x |x|$$

avec :

$$(12) \quad S = A_1 B + AB_1 - A_1 k.$$

On voit alors que deux cas se présentent suivant le signe de S (fig. 28 et 29).

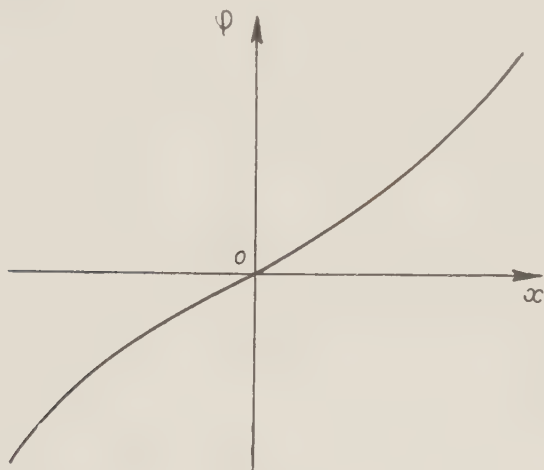


Fig. 28

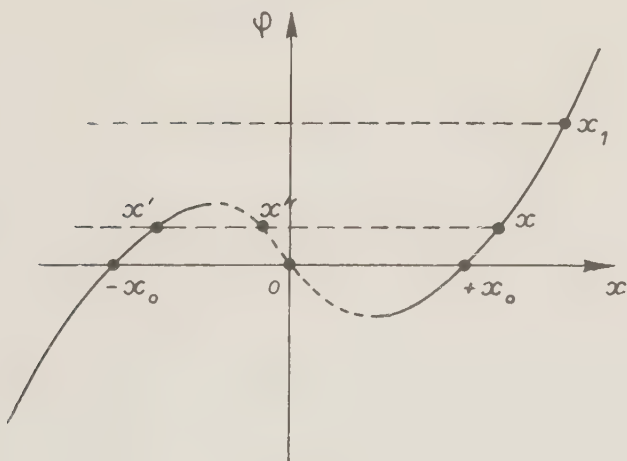


Fig. 29

1° $S > 0$.

A une valeur de φ correspond une seule valeur de x , donc une seule giration possible. Si φ tend vers zéro, cette giration tend vers une translation rectiligne.

L'équation (10) donne la dérive correspondante.

Nous verrons au paragraphe suivant que de tels mouvements sont stables.

$2^\circ \text{ S} < 0$.

On a alors une ou trois valeurs de x pour une valeur de φ . Disons tout de suite en anticipant sur le paragraphe suivant que pour $\varphi' > 0$ les girations correspondantes sont stables.

Il se produit alors le phénomène suivant : φ étant d'abord assez grand, le navire tourne avec une giration importante x_1 . Si nous ramenons alors la barre à zéro la giration x_1 tend vers une giration x_0 non nulle.

La giration finale aura le même sens que la giration initiale x_1 .

D'autre part, il sera difficile de maintenir une marche rectiligne correspondant à $x = 0$. La barre étant à zéro, le navire a tendance à tourner soit à gauche, soit à droite avec la giration $\pm x_0$.

Ce phénomène a été observé sur divers bâtiments et signalé en particulier par DUPUY DE LOME [7], les Drs. DAVIDSON et SCHIFF [8], M. DIEUDONNÉ [9]. Citons ce dernier :

« Le bâtiment étant en giration à gauche barre toute, on ramène la barre à droite 3° , le bâtiment prend un régime permanent de giration à gauche à la vitesse de rotation $0,52^\circ/\text{s}$. Si, au contraire, on part de la giration à droite barre toute, et qu'on ramène le safran au même angle (troisième à droite) le bâtiment prend un régime permanent de giration à droite à la vitesse de $0,85^\circ/\text{s}$. Corrélativement on constate l'impossibilité pratique de tenir le navire en ligne droite. »

Remarquons que les trois girations que nous obtenons (dont une instable et, par conséquent, non observée) ne correspondent sans doute pas à un même angle du gouvernail, mais à une même force φ . Rappelons, en effet, que cette force est la différence entre les composantes transversales des forces hydrodynamiques qui s'exercent, pour le régime considéré, d'une part sur l'ensemble de la carène et du gouvernail orienté, et d'autre part sur l'ensemble de la carène et du gouvernail à zéro. Cette différence peut être, pour les petits angles de barre, de sens opposé à celui des efforts sur la mèche comme l'ont montré les essais de M. BRARD [2]. Ainsi la racine x'' (instable) négative pour $\varphi > 0$ peut correspondre cependant à un angle de barre négatif.

Mais comme nous avons trois régimes pour $\varphi = 0$ (qui correspond à la barre à zéro), nous sommes assurés, par continuité, qu'il y a encore trois régimes pour des petits angles de barre et que notre condition $\text{S} < 0$ correspond bien au cas décrit par les auteurs cités.

Nous allons maintenant étudier les mouvements non permanents ce qui nous permettra de déterminer la stabilité de route, et, en outre, de mettre en évidence des phénomènes d'autolouvoyage. Nous montrerons enfin comment les résultats du chapitre II permettent d'obtenir une bonne stabilité de route en rendant $\text{S} > 0$.

3.6 MOUVEMENTS NON PERMANENTS — STABILITÉ DE ROUTE

Les équations (4) et (5) permettent d'étudier n'importe quels mouvements du navire du moins ceux au cours desquels les hypothèses faites pour le calcul des forces restent vérifiées constamment. Nous nous bornerons à l'étude des petits mouvements,

voisins au sens de la mécanique rationnelle de la translation rectiligne, ce qui nous permettra de déterminer la stabilité de route. Celle-ci traduit le fait qu'un navire écarté accidentellement de son régime tend à le reprendre.

Il peut évidemment se faire qu'au cours de cette perturbation le cap ait changé ; un navire dynamiquement isolé ne pouvant avoir de cap préférentiel il ne s'agit pas de stabilité de direction, mais seulement de régime.

M. ROY [10] a étudié la stabilité de route de l'avion par cette méthode des petits mouvements. M. CONTENSOU [11] a appliqué la même méthode pour le navire et donné une condition analytique que devait vérifier, pour la stabilité, les forces appliquées au navire ; dans ce travail les forces en question n'étaient pas explicitées et, en outre, il n'était pas tenu compte des forces supplémentaires dues à la non permanence du mouvement.

Nous allons voir que cette condition s'écrit ici $S > 0$, et qu'elle est indépendante des forces supplémentaires qui n'ont pour effet que de modifier la valeur de l'amortissement.

Suivant la méthode de LAGRANGE pour l'étude des petits mouvements nous négligeons les termes en δ^2 et en $\left(\frac{1}{R}\right)^2$. En outre, nous poserons :

$$(13) \quad I + I_0 = (M + M_0) \left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{h}{k_1} \quad \text{et} \quad M + M_0 = \frac{1}{2} \rho S \pi \varepsilon \frac{L}{2} k_1.$$

Les équations (4) et (5) s'écrivent alors :

$$k \frac{L}{2R} - k_1 \frac{L}{2V} \delta' = A\delta + B \frac{L}{2R} - \int_{-\infty}^t \Gamma \left[V(t-t_0) \right] \left[A\delta' + B \left(\frac{L}{2R} \right)' \right] dt_0;$$

$$\frac{L}{2V} h \frac{d}{dt} \frac{L}{2R} = A_1 \delta - B_1 \frac{L}{2R} + \int_{-\infty}^{t'} \Gamma \left[V(t-t_0) \right] \left[A\delta' + B \left(\frac{L}{2R} \right)' \right] dt_0.$$

En prenant comme unité de temps $\frac{L}{2V}$ c'est-à-dire le temps nécessaire au navire pour parcourir sa demi-longueur, ces équations s'écrivent :

$$(14) \quad -k_1 \delta' = A\delta + (B - k) x - \int_{-\infty}^t \Gamma \left[\frac{L}{2}(t-t_0) \right] \left[A\delta'(t_0) + Bx'(t_0) \right] dt_0;$$

$$(15) \quad hx' = A_1 \delta - B_1 x + \int_{-\infty}^{t'} \Gamma \left[\frac{L}{2}(t-t_0) \right] \left[A\delta'(t_0) + Bx'(t_0) \right] dt_0.$$

La vitesse n'intervient plus, même dans les termes intégraux, que par l'unité de temps. A vitesses différentes les mouvements sont semblables.

Si nous négligeons les termes intégraux, le système se réduit à un système linéaire du second ordre dont l'équation caractéristique est :

$$(k_1 s + A)(hs + B_1) = A_1(k - B)$$

ou :

$$(16) \quad s^2 h k_1 + s(Ah + B_1 k_1) + S = 0.$$

On trouve bien que si $S < 0$ l'une des racines est positive et le mouvement rectiligne $\delta = 0$, $x = 0$ est instable.

Si $S > 0$ la somme des racines étant négative le mouvement est stable. On peut d'ailleurs voir que les racines sont réelles et que le retour à $\delta = 0$, $x = 0$ se fait sans oscillations : le discriminant est :

$$\Delta = (A h + B_1 k_1)^2 - 4 h k_1 (A B_1 + A_1 B - A_1 k);$$

$$\Delta = (A h - B_1 k_1)^2 + 4 A_1 h k_1 (k - B).$$

Δ est positif car k est toujours supérieur à B ($B < 1 < k$).

$S > 0$ explicite donc le critère de stabilité de route de CONTENSOU.

(L'étude identique des mouvements voisins d'une giration permanente donne comme condition de stabilité $\varphi' > 0$.)

En tenant compte des termes intégraux nous cherchons encore des solutions de la forme :

$$\delta = \lambda_1 e^{st}, \quad x = \lambda_2 e^{st}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^t \Gamma \left[\frac{L}{2} (t - t_0) \right] \cdot e^{st_0} dt_0 = e^{st} \int_0^{\infty} \Gamma \left(\frac{L}{2} \theta \right) e^{-s\theta} d\theta = e^{st} F \left[s, \frac{L}{2} \right],$$

$F \left(s, \frac{L}{2} \right)$ n'est autre que la transformée de LAPLACE de $\Gamma(t)$.

Puisque Γ est positif et s'annule rapidement, nous savons que F est une fonction constamment décroissante :

$$F \left(-\infty, \frac{L}{2} \right) = +\infty, \quad F \left(+\infty, \frac{L}{2} \right) = 0;$$

$$\text{Pour : } s = 0, \quad F \left(0, \frac{L}{2} \right) = \int_0^{\infty} \Gamma \left(\frac{L}{2} \theta \right) d\theta = \frac{2}{L} \int_0^{\infty} \Gamma(u) du = \frac{a}{L}.$$

$$F' \left(0, \frac{L}{2} \right) = \int_0^{\infty} \theta \Gamma \left(\frac{L}{2} \theta \right) d\theta = \frac{4}{L^2} \int_0^{\infty} u \Gamma(u) du = \frac{b}{L^2},$$

a et b sont deux constantes, $b < a$. Comme L est grand, F' est faible devant F :

Au voisinage de l'origine F varie peu :

Cette remarque étant faite, la nouvelle équation caractéristique s'écrit :

$$(17) \quad s^2 h k_1 + s (A h + B_1 k_1) + S = s F \left(s, \frac{L}{2} \right) [(A h + B k_1) s + A k + A_1 B + A B_1]$$

ou :

$$H(s) = F \left(s, \frac{L}{2} \right) s (\alpha s + \beta).$$

$H(s)$ n'est autre que le premier membre de l'équation (16), α et β sont positifs.

Il est facile de voir en vertu des inégalités que vérifient les différents coefficients que $H \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) > 0$ lorsque $S > 0$. Si nous traçons sur un même graphique les courbes $H(s)$

et $H_1(s) \equiv F \left(s, \frac{L}{2} \right) \cdot s (\alpha s + \beta)$, la première est une parabole, la seconde une courbe

qui, au voisinage de l'origine, est analogue à une parabole, s'annule pour $s = 0$ et $s = -\frac{\beta}{\alpha}$, mais tend vers 0 pour $s = +\infty$ et vers l'infini pour $s = -\infty$.

Lorsque $S < 0$ il y a encore une racine positive qui est même supérieure à la racine de $H = 0$. Le mouvement est encore plus instable (fig. 30).

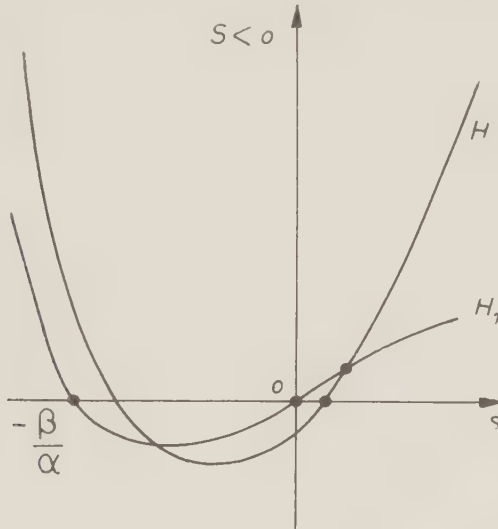


Fig. 30

Lorsque $S > 0$, Si F est petit, il y a encore deux racines négatives réelles (fig. 31, courbe 1), qui sont comprises entre les deux précédentes, le mouvement est encore stable.

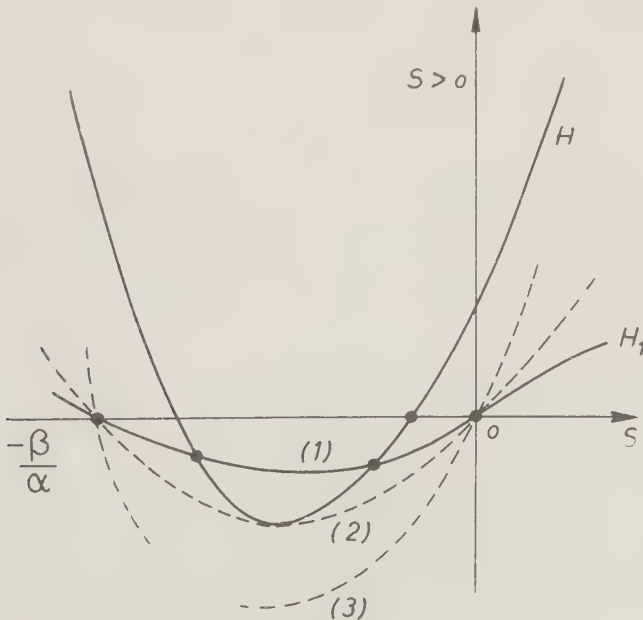


Fig. 31

Si F est plus grand, ces deux racines peuvent se confondre (*fig.* 31, courbe 2) ou devenir complexes (*fig.* 31, courbe 3). Le mouvement transitoire, qui ramène le navire à la marche rectiligne, devient oscillant.

La stabilité elle-même se trouve augmentée par l'effet de ces forces supplémentaires. En effet, la plus grande racine (en valeur algébrique) se trouve diminuée et, par suite, l'amortissement est plus considérable, sauf lorsqu'on obtient un mouvement transitoire oscillant. Si nous voulons chiffrer la stabilité, ainsi que le propose CONTENSOU par le produit des racines, nous obtenons [en prenant $F(s) \sim F(0)$] :

$$\frac{S}{h k_1 - F(0) (A h + B k_1)} > \frac{S}{h k_1}.$$

En conclusion la condition de stabilité reste encore $S > 0$.

L'effet des forces supplémentaires est d'augmenter l'instabilité si $S < 0$ et, si elles ne sont pas trop considérables, d'augmenter la stabilité si $S > 0$.

3,7

PHÉNOMÈNE D'AUTOLOUVOYAGE

Nous venons de faire la restriction que les forces supplémentaires n'étaient pas trop importantes, c'est-à-dire que la distance que le navire doit parcourir pour « oublier ses mouvements antérieurs » n'est pas trop importante devant sa longueur. S'il n'en est pas ainsi le mouvement transitoire peut devenir oscillant, ainsi que nous l'avons vu.

En supposant encore F pratiquement constant, l'équation (17) est du second degré, et le coefficient de s diminue plus vite que le coefficient de s^2 , l'amortissement se trouve alors diminué et peut devenir nul pour :

$$F = \frac{A h + B_1 k_1}{A k_1 + A_1 B + A B_1}.$$

Le mouvement oscillant correspondant a été observé sur certains navires qui, d'eux-mêmes, se mettent à louvoyer, ce qui est nuisible, même lorsque l'amplitude est faible, puisque l'énergie correspondant à ce mouvement est prise sur celle qui est nécessaire à sa vitesse. Un tel phénomène s'explique donc par le retard dans l'établissement de la circulation.

3,8

REMARQUE SUR L'EFFET DE LA VITESSE

Ainsi que nous l'avons vu les différents phénomènes que nous avons étudiés (stabilité, autolouvoyage) sont indépendants de la vitesse. Ils sont déterminés par la forme même du navire. On observe cependant que cette affirmation est fausse. M. SAINT-DENIS [8] a signalé un bâtiment stable aux petites vitesses, instable aux grandes. M. DIEUDONNÉ [9] a observé le cas inverse, et estime que ce phénomène est dû au fonctionnement des hélices.

Nous avons, pour notre part, étudié les mouvements du navire en supposant essentiellement que les hélices fonctionnaient de manière à conserver au navire une vitesse constante. Il faudrait ici pouvoir étudier le fonctionnement des hélices dans un mouvement non permanent, étude qui sort du cadre de notre travail.

3,9

CORRECTION DE L'INSTABILITÉ — MARCHE ARRIÈRE

Les résultats de la fin du chapitre II nous permettent de voir comment on peut corriger l'instabilité. Si un navire est instable, la quantité $A_1 B + A B_1 - A_1 k$ est négative. Par conséquent, k est trop grand et le navire est trop large, ce qui n'est pas facile à corriger. Mais on peut rendre B et B_1 plus grands, nous l'avons vu, en effilant l'arrière : soit en ajoutant un plan mince à l'arrière, soit en augmentant la surface du safran.

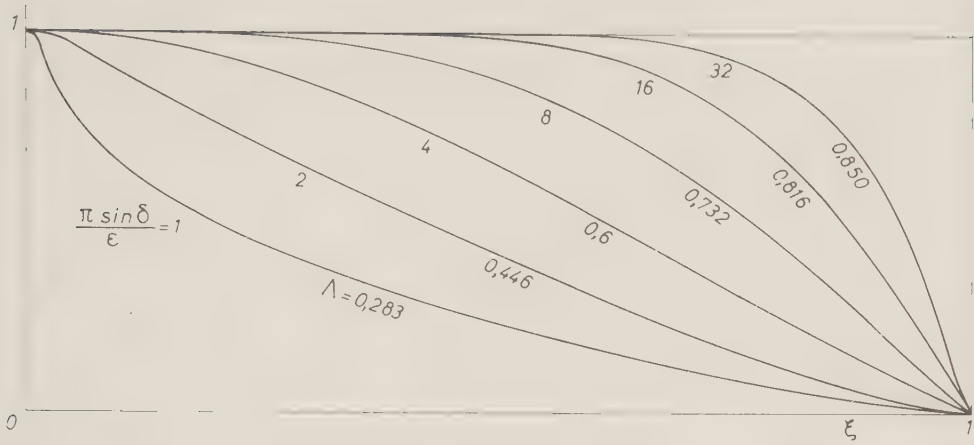
Remarquons cependant qu'en faisant cette opération on risque de rendre le navire instable en marche arrière.

Tout se passe, en effet, comme si l'on avait ajouté un plan mince à l'avant d'un navire, ce sont les coefficients A_1 et B qui se trouvent alors augmentés. Le terme $A_1 (B - k)$, où k est toujours supérieur à B peut se trouver diminué et la stabilité rompue.

PLANCHES

— — — — —

PLANCHE I



Répartition des tourbillons pour différentes valeurs de δ (δ très petit).

PLANCHE II

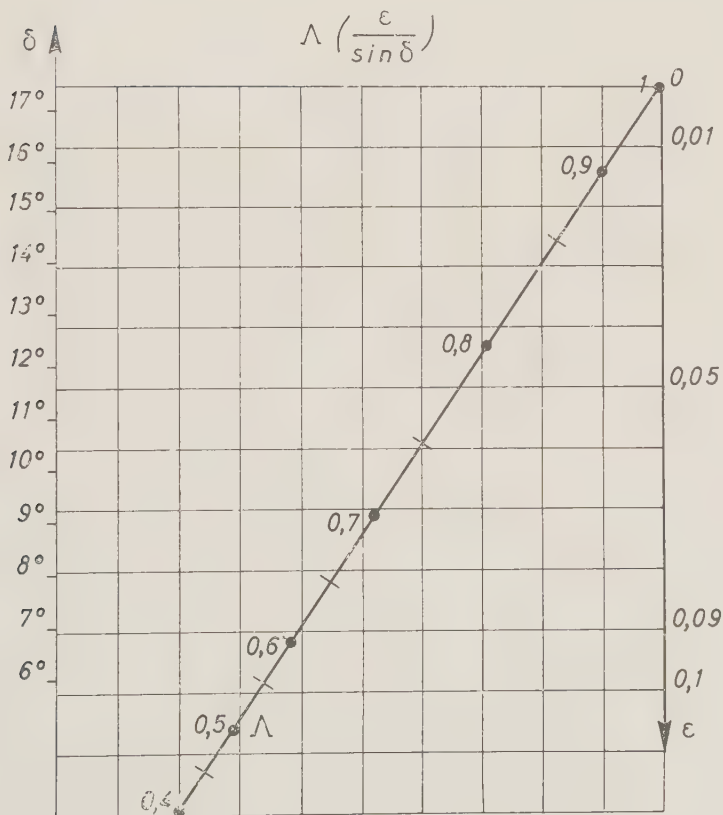
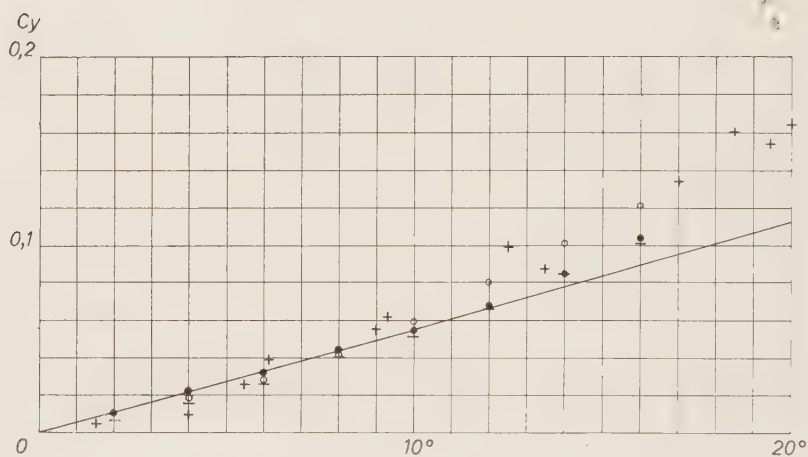


PLANCHE III

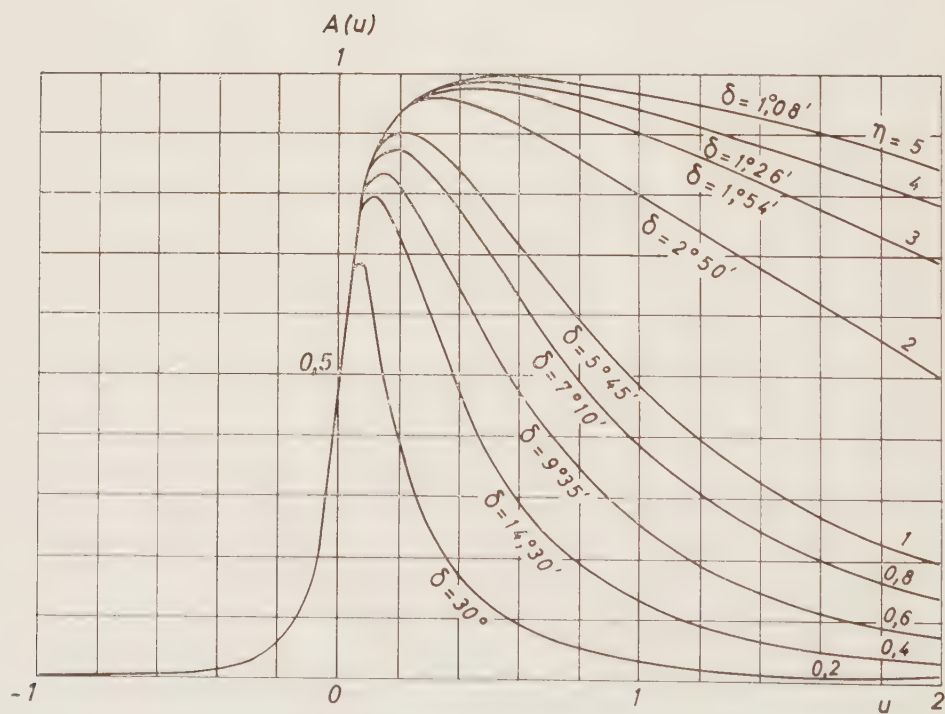


Valeurs expérimentales de C_y pour 4 navires.

La courbe correspond à la valeur théorique $C_y = \pi \varepsilon \operatorname{tg} \delta$.

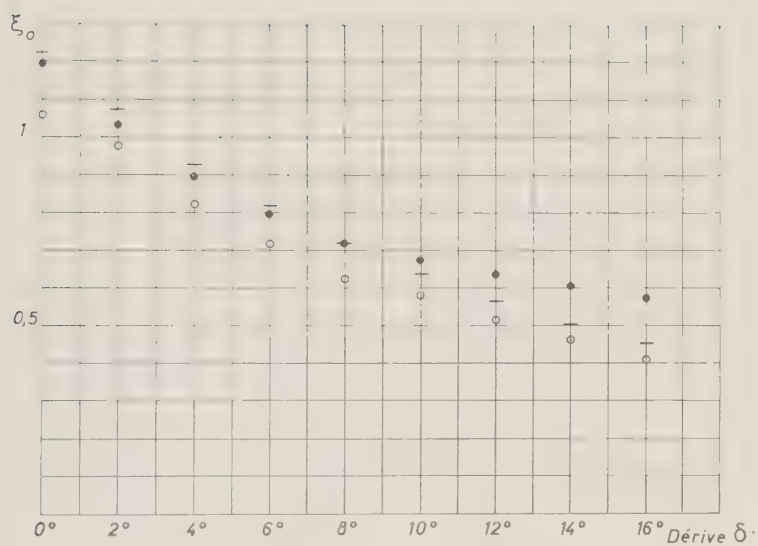
Navire A : $\circ$ $\varepsilon = 0,105$, Navire C : $\bullet$ $\varepsilon = 0,110$, Navire B : $+$ $\varepsilon = 0,14$, Navire D : $-$ $\varepsilon = 0,106$.

PLANCHE IV



Courbes $A(u) = \frac{1}{2} \frac{\tau_i^2}{\tau_i^2 + u^2} \left(1 + \frac{u \cos \delta}{\sqrt{\varepsilon^2 + u^2}} \right)$, $\varepsilon = 0,1$, $\tau_i = \frac{\varepsilon}{\sin \delta} = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 2; 3; 4; 5$.

PLANCHE V



Point d'application de la force hydrodynamique.
 Navire A : ○. Navire C : ●. Navire D : —.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRARD. — *Cours de théorie du navire de l'École du Génie Maritime* (1949 1950).
 - [2] BRARD BLEUZEN. — *État actuel des recherches sur la giration au bassin d'essais des Carènes*. A.T.M.A. (1947).
 - [3] KENNETH DAVIDSON. — *Transaction Society of Naval Architect and Marine Engineers*. Vol. 54. p. 153 (1946).
 - [4] M. ROY. — *Sur l'Aérodynamique des ailes sustentatrices*. Gauthier Villard (1928).
 - [5] M. LEGRAS. — *Contribution à l'étude de l'aile portante*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n° 222.
 - [6] Dr Kurt WENDEL. — *Hydrodynamischen Massen und Hydrodynamische Massenträgheitsmomente*. Hansa, 23 déc. 1950, nos 51/52, p. 1653.
 - [7] DUPUY DE LOME. — *Note sur l'absence de précision dans la manière dont gouverne l'implacable*. Mémorial du Génie Maritime (1866).
 - [8] DAVIDSON et SCHIFF. — *Turning and Course Keeping Qualities*. S.N.A.M.E. (1946).
 - [9] DIEUDONNÉ. — *Note sur la stabilité des régimes de route des navires*. A.T.M.A. (1949).
 - [10] M. ROY. — *Le problème de la stabilité des régimes de vol*. A.T.M.A. (1931).
 - [11] CONTENSOU. — *Mécanique du navire en route et en giration*. A.T.M.A. (1938).
-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

SUR LA DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FONCTIONS PROPRES

Vu et approuvé :

Paris, le 30 avril 1951

Pour le Doyen de la Faculté des Sciences,
l'Assesseur :

R. LÉVY.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris :

J. SARRAILH.



IMPRIMERIE



IMPRIMERIE